ЛЕКЦИЯ 4

КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ КИНЕМАТИКИ СИСТЕМЫ. СВЯЗИ

1. Кинематика сложного движения тела

Прошлая лекция закончилась рассмотрением кинематических уравнений Эйлера. Была рассмотрена задача о вращении вокруг пересекающихся осей. Продолжим изучать кинематику сложного движения тела, рассмотрев вращение вокруг параллельных осей.

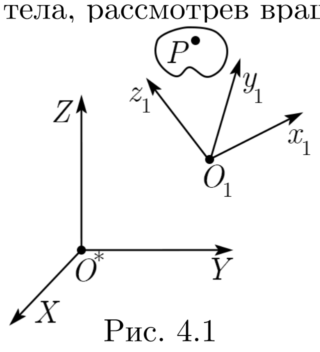

Рис. 4.1

Имеется неподвижная система координат O^*XYZ. В ней перемещается подвижная система координат $O_1x_1y_1z_1$. Твёрдое тело движется относительно подвижной системы отсчёта. Выберем в теле произвольную точку P.

Пусть $\vec{\omega}_1$ — мгновенная угловая скорость вращения тела относительно подвижной системы отсчёта. $\vec{\omega}_2$ — мгновенная угловая скорость вращения подвижной системы отсчёта относительно неподвижной. Рассмотрим случай, когда они параллельны. Возможны два варианта: когда $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ направлены в одну сторону, и когда они направлены в противоположные стороны.

1). Пусть они направлены в одну сторону. Вектор угловой скорости — скользящий вектор, его можно перемещать по прямой его действия, так что можно переместить векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ так, чтобы линия, соединяющая точки их приложения A и B, была перпендикулярна самим векторам (рис. 4.2) Очевидно, что поле скоростей в любой плоскости, перпендикулярной $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$, одинаково. Кроме того, если выделить прямую, параллельную этим векторам, то все её точки будут иметь одинаковую скорость.

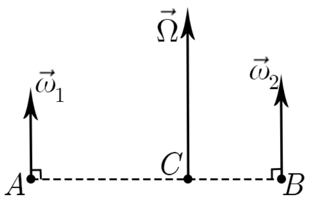

Рис. 4.2

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2 Результирующее движение твёрдого тела является мгновенным вращением вокруг оси, параллельной $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ и проходящей через точку C, находящуюся на отрезке AB, причём результирующая угловая скорость $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. Точка C делит отрезок AB внутренним образом на части, обратно пропорциональные соответствующему ω_i, то есть,

$$\omega_1\, AC = \omega_2\, BC. \tag{4.1}$$

*

Док-во: Равенство (4.1) — не что иное, как правило рычага. Для доказательства утверждения найдём скорость точки C. Согласно теореме о сложении скоростей,

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{r}} + \vec{v}_{\text{e}} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{BC} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AC}. \tag{4.2}$$

Слагаемые в (4.2) направлены в противоположные стороны. Так как векторы в обоих векторных произведениях ортогональны, то по модулю оба слагаемых одинаковы, так что равенство (4.1) справедливо. Скорость в точке v_C нулевая, значит, целая прямая, проходящая через эту точку, имеет нулевые скорости, стало быть, это мгновенная ось вращения.

Теперь найдём модуль вектора $\vec{\Omega}$. Для этого напишем скорость точки B:

$$\vec{v}_B = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CB} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB}. \tag{4.3}$$

Из равенства (4.3) следует, что $\vec{\Omega}$ направлен так же, как $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$.

$$\Omega \cdot CB = \omega_1 \cdot AB, \tag{4.4}$$

$$\Omega = \omega_1 \frac{AB}{CB} = \omega_1 \frac{AC + CB}{CB} = \omega \left(\frac{AC}{CB} + 1 \right) = \omega_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + 1 \right) = \omega_1 + \omega_2. \tag{4.5}$$

■

2). Пусть векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ направлены в противоположные стороны и не равны по модулю. Для определённости примем, что $\omega_1 > \omega_2$. Можно аналогичным образом доказать, что в таком случае результирующее движение будет мгновенным вращением с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ (модуль $\Omega = \omega_1 - \omega_2$) вокруг оси, проходящую через точку C на

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

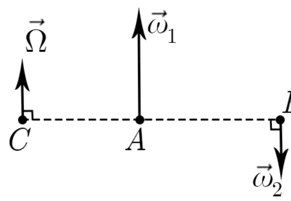

Рис. 4.3

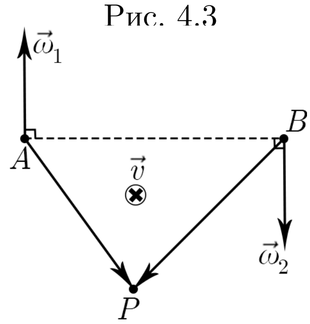

Рис. 4.4

прямой AB. Точка C делит отрезок AB внешним образом на отрезки, пропорциональные соответствующему ω_i, то есть выполняется соотношение

$$\omega_1\, AC = \omega_2\, BC. \tag{4.6}$$

Заметим, что равенство (4.6) совпадает с (4.1) и выражает то же правило рычага.

3). Пусть векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ направлены в противоположные стороны и равны по модулю: $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$. Такой случай называется **парой вращений**. Из (4.6) следует, что точка C уйдёт на бесконечность.

Введём обозначение $\omega \overset{\text{def}}{=} \omega_1 = \omega_2$. Расстояние $d \neq 0$ между прямыми действия $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ называется **плечом пары вращений**. Плоскость, в которой находится векторы $\vec{\omega}_1$ и $\overrightarrow{AB}$, называется **плоскостью пары вращений**. **Моментом пары вращений** называется величина $\overrightarrow{AB} \times \vec{\omega}_2 = \overrightarrow{BA} \times \vec{\omega}_1$.

Найдём скорость произвольной точки P.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{\text{r}} + \vec{v}_{\text{e}} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} \times \vec{\omega}_2 + \overrightarrow{AP} \times \vec{\omega}_2 = \left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AP}\right) \times \vec{\omega}_2 = \overrightarrow{AB} \times \vec{\omega}_2. \tag{4.7}$$

Видно, что скорость $\vec{v}_P$ не зависит от выбора точки P и равна моменту пары. Следовательно, *твёрдое тело, участвующее в паре вращений, движется мгновенно-поступательно со скоростью, равной моменту пары*

Обратное тоже верно: если тело движется мгновенно-поступательно, то это движение можно рассматривать как пару вращений, подобрав подходящие ω и d. Заметим, что как значения ω и d, так и направления соответствующих векторов могут быть разными, лишь бы выполнялись условие $\omega d = v$ и плоскость пары была ортогональна вектору $\vec{v}$.

2. Сложение мгновенного вращения и мгновенно-поступательного движения

Пусть твёрдое тело одновременно участвует в мгновенном вращении и мгновенно-поступательном движении. Даны векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$. Угол между этими векторами равен α. Найдём резуль-

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech. edu

тирующее движение.

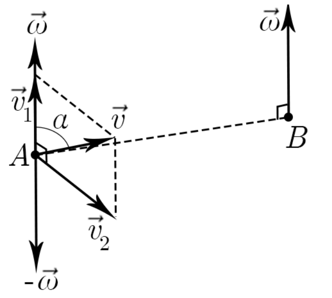

Рис. 4.5

Построим эти векторы из одной точки A. Если $\alpha = 0$, то движение является мгновенно-винтовым по определению. В общем случае проведём перпендикуляр к $\vec{\omega}$ в плоскости, образуемой векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$, и разложим вектор $\vec{v}$ на две составляющие. Тогда $v_1 = v\cos\alpha$, $v_2 = v\sin\alpha$. Итак, движение разбито на три составляющие: вращение с $\vec{\omega}$ и два поступательных движения с $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Заменим вектор $\vec{v}_2$ на пару вращений. Продолжим прямую, содержащую вектор $\vec{\omega}$, в сторону, противоположную направлению этого вектора, и отложим вектор $-\vec{\omega}$. Через точку A проведём прямую, перпендикулярную плоскости, образуемой векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$, и возьмём на ней точку B. От точки B построим вектор $\vec{\omega}$. Расстояние между точками A и B нужно взять таким, чтобы $AB\,\omega = v_2$. Вращения с угловыми скоростями $\vec{\omega}$ и $-\vec{\omega}$ вокруг прямой, проходящей через точку A, «аннигилируют».

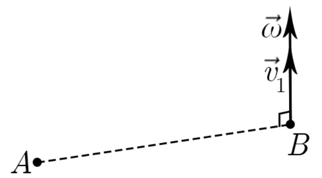

Рис. 4.6

Итак, первоначальная ситуация эквивалентна изображённой на рис. 4.6. Имеется вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг прямой, проходящей через точку B, и мгновенно-поступательное движение со скоростью $\vec{v}_1$, сонаправленной с вектором $\vec{\omega}$. Таким образом, в общем случае результирующее движение является мгновенно-винтовым. Параметр винта $p = \dfrac{v_1}{\omega} = \dfrac{v\cos\alpha}{\omega}$. Заметим, что если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то остаётся одно вращение, но вокруг смещённой оси.

3. Общий случай сложного движения твёрдого тела

В общем случае ускорения и угловые ускорения рассматриваться не будут. Займёмся полем скоростей при произвольном движении твёрдого тела.

Имеется некоторое количество мгновенно-поступательных движений $\vec{v}_1, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ и мгновенных вращений $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$. Рассчитаем поле скоростей в результирующем движении. Как только что было получено, мгновенно-поступательное движение можно за-

! ***Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.***

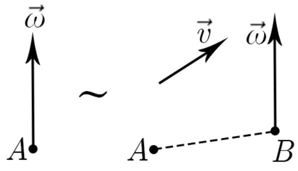

Рис. 4.7

менить на пару вращений: $\vec{v}_j \sim \vec{\omega}'_j, \vec{\omega}''_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Так можно заменить все m мгновенно-поступательных движений, и получится совокупность вращений $\vec{\omega}'_1, \vec{\omega}''_1, \dots, \vec{\omega}'_m, \vec{\omega}''_m, \vec{\omega}_1,$

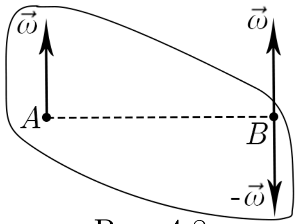

Рис. 4.8

Все эти векторы являются скользящими. Существует раздел векторной алгебры — теория скользящих векторов, следствия которой будут полезны при дальнейших вычислениях. Однако не будем вдаваться в её терминологию. Важно то, что общий случай мгновенного движения твёрдого тела принципиально можно представить в виде совокупности вращений.

Лемма 1 (о параллельном переносе вектора мгновенной угловой скорости) Пусть твёрдое тело совершает мгновенное вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$, вектор которой приложен к точке A. Можно перенести этот вектор в другую точку B, добавив пару вращений с моментом $\vec{v} = \overrightarrow{BA} \times \vec{\omega}$ или мгновенно-поступательное движение с такой скоростью. $*$

Док-во: Совершим такое построение: добавим два вращения с угловыми скоростями $\vec{\omega}$ и $-\vec{\omega}$, приложенными к точке B. Заменим пару вращений $\vec{\omega}$ от A и $-\vec{\omega}$ от B на поступательное движение со скоростью $\vec{v} = \overrightarrow{BA} \times \vec{\omega}$. Получим совокупность вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}$, приложенной к точке B, и поступательного движения, что и требовалось доказать. ■

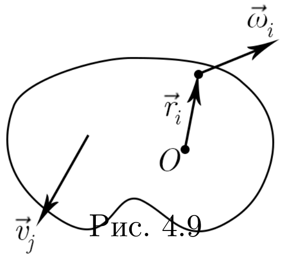

Рис. 4.9

Введём величину $\vec{\Omega} \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i$. Это **результирующий вектор угловой скорости**. Он также называется **главным вектором угловых скоростей**. Выберем в твёрдом

! ***Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на*** pulsar@phystech.edu

$\left(\vec{\Omega}, \vec{V}_O\right)$	$\vec{\Omega}$	$\vec{V}_O$	Результирующее движение
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгн. винтовое движение
$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	мгн. вращение (ось проходит через точку O)
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгн. вращение (ось не проходит через точку O)
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	мгн. поступательное движение
$= 0$	$= 0$	$= 0$	мгн. покой

Таблица 4.1

теле произвольную точку O. Назовём её **центром приведения**. Обозначим вектор от точки O до точки приложения вектора $\vec{\omega}_i$ как $\vec{r}_i$. **Результирующим вектором поступательных скоростей** назовём вектор

$$\vec{V} = \sum_{j=1}^{m} \vec{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{\omega}_i. \tag{4.8}$$

Утверждение 3 Предположим, что все $\vec{v}_j$ и $\vec{\omega}_i$ заданы. Возьмём в теле произвольную точку O. Тогда исходная совокупность движений $\vec{v}_1, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ эквивалентна вращению с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ вокруг оси, проходящей через точку O, и поступательному движению со скоростью $\vec{V}$. *

Док-во: Доказательство этого утверждения следует из леммы. Перенесём все векторы $\vec{\omega}_i$ в точку O. Чтобы поле скоростей не изменилось, нужно добавить поступательные скорости $\vec{r}_i \times \vec{\omega}_i$. Теперь прямые, образуемые векторами $\vec{\omega}_i$, проходят через точку O, поэтому результирующий вектор угловой скорости равен сумме этих векторов. Результирующий вектор поступательных скоростей при этом удовлетворяет соотношению (4.8). ■

Вектор $\vec{\Omega}$ не зависит от выбора центра приведения, а вектор $\vec{V}$ — зависит. Найдём явный вид этой зависимости. Возьмём произвольную точку O'.

$$\begin{gathered}\vec{V}_{O'} = \sum_{j=1}^{m} \vec{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \vec{r'}_i \times \vec{\omega}_i = \sum_{j=1}^{m} \vec{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{O'O} + \vec{r}_i\right) \times \vec{\omega}_i = \\ = \sum_{j=1}^{m} \vec{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{\omega}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{O'O} \times \vec{\omega}_i = \vec{V}_O + \overline{O'O} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Таким образом, при изменении центра приведения

$$\vec{V}_{O'} = \vec{V}_O + \overline{O'O} \times \vec{\Omega}. \tag{4.10}$$

Напомним, что кинематические инварианты не должны зависеть от выбора точки O. Значит, $I_1 = \Omega^2$ и $I_2 = \left(\vec{\Omega}, \vec{V}\right)$ остаются неизменными. Причём если $I_2 \neq 0$, то движение является мгновенно-винтовым.

Пусть задана совокупность мгновенно-поступательных движений и мгновенных вращений. Выберем точку O и рассчитаем векторы $\vec{\Omega}$ и $\vec{V}_O$. Учитывая всё, что говорилось о кинематике движения твёрдого тела, составим таблицу, по которой можно определить, в каком мгновенном движении находится твёрдое тело (таблица 4.1).

Итак, существует всего четыре типа мгновенных движений твёрдого тела: покой, поступательное движение, вращение, винтовое движение. Всё движения твёрдых тел в природе являются упорядоченными последовательностями этих простейших движений. Изложенных знаний достаточно, чтобы справиться с домашним заданием по кинематике.

4. Общие вопросы кинематики системы

Предположим, что имеется система материальных точек P_ν, $\nu = 1, 2, \dots, N$. Начало отсчёта обозначим как O, радиус-вектор точки P_ν — как $\vec{r}_\nu$.

Если на положение и скорости точек не накладывается никаких ограничений, то система называется **свободной**. Если же есть какие-либо ограничения на координаты и/или скорости частиц, то система называется **несвободной**. Эти ограничения, которые должны выполняться при любых силах, действующих на точки, называются **связями**.

Приведём несколько примеров, чтобы проиллюстрировать эти понятия.

1). Предположим, что система состоит из одной материальной точки, которая может двигаться только в плоскости xy (рис. **??**). Эта связь может быть выражена равенством $z = 0$.

2). Одна материальная точка вынуждена оставаться на сфере переменного радиуса (рис. **??**). Тогда связь имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0$. Если $f(t) = \text{const}$, то точка может перемещаться только по сфере фиксированного радиуса.

3). Пусть система состоит из двух материальных точек P_1 и P_2. Их радиус-векторы — $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Эти точки связаны нерастяжимой нитью длины l (рис. **??**). Она может деформироваться, так что она не препятствует сближению точек. Тогда должно выполняться условие $l^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \geqslant 0$.

4). Пусть одна материальная точка движется по плоскости xy, но может и отдаляться от неё в сторону положительных значений z (рис. **??**). Тогда связь имеет вид $z \geqslant 0$.

5). Две материальные точки связаны стержнем. Скорость любой точки стержня направлена вдоль стержня (рис. **??**). Можно представить, что это две точки конька на льду, причём конёк не может подрезать лёд. Обозначим как ϕ угол между стержнем и горизонталью. Тогда $\dot{y} = \operatorname{tg}\phi\,\dot{x}$.

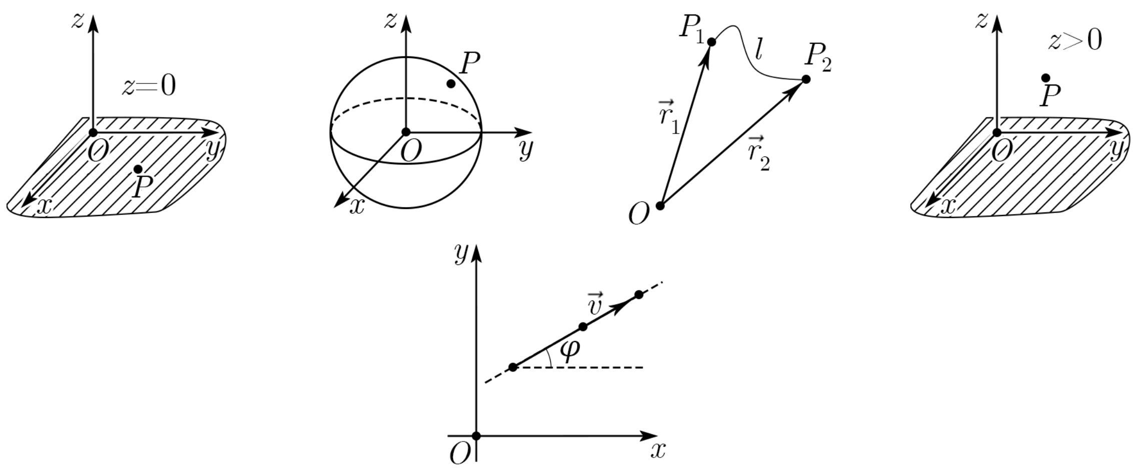

Рис. 4.10

Общий вид уравнения связи можно представить так:

$$f(\vec{r}_\nu, \vec{v}_\nu, t) \geqslant 0. \tag{4.11}$$

Это функция от $3N$ координат, $3N$ скоростей и времени, то есть от $6N+1$ переменных. Если связь можно написать в виде $f(\vec{r}_\nu, \vec{v}_\nu, t) = 0$, то связь называется **удерживающей**, или **двусторонней**. Её иногда называют **неосвобождающей связью**. Такой вид связи имеет место в примерах 1, 2, 5. Если связь записывается в виде $f(\vec{r}_\nu, \vec{v}_\nu, t) \geqslant 0$, то связь называется **неудерживающей**, **односторонней**, или **освобождающей**. Далее в курсе будут рассматриваться только удерживающие связи.

Если уравнение связи не содержит проекций скоростей, то есть $f(\vec{r}_\nu, t) = 0$, то связь называется **геометрической**, **конечной**, или **голономной**. Такой тип связи встречается в примерах 1 и 2. Если уравнение связи содержит и проекции скоростей, то есть $f(\vec{r}_\nu, \vec{v}_\nu, t) = 0$, то связь называется **дифференциальной**, или **кинематической связью**.

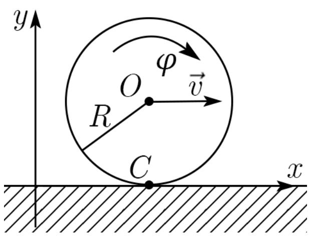

Рис. 4.11

Иногда связь, кажущуюся дифференциальной, на самом деле можно записать как геометрическую. Такая связь называется **интегрируемой**. Например, пусть диск катится без скольжения вдоль оси x. Тогда можно написать, что $\dot{x} = R\dot{\phi}$, где ϕ — угол поворота, а R — радиус диска (рис. 4.11). Но это то же самое, что и связь $x = r\phi + \text{const}$. Поэтому это пример интегрируемой связи, хотя внешне она выглядит как кинематическая. Если дифференциальная связь не является интегрируемой, то она называется **неголономной**. Например, в примере 5 связь неголономная, её нельзя записать в виде соотношения между координатами и временем.

Система может содержать несколько связей. Пусть в системе имеется r геометрических связей:

$$f_\alpha(\vec{r}_\nu, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, r). \tag{4.12}$$

Например, если точка движется по линии пересечения плоскостей, то имеется две геометрических связи, уравнения которых являются уравнениями этих плоскостей. Если геометрическая связь не зависят явно от времени, то такая связь называется **стационарной**.

В данном курсе будем предполагать, что все дифференциальные связи линейны по скоростям. Вопрос существования систем со связями, нелинейными по скоростям, — сложный вопрос, и он рассматриваться не будет. Пусть в системе есть s дифференциальных связей:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{a}_{\beta\nu}\vec{v}_\nu + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \dots, s). \tag{4.13}$$

! ***Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.***

Здесь коэффициенты $\vec{a}_{\beta\nu}$ и a_β — функции только координат и времени. Дифференциальная связь называется **стационарной**, если $a_\beta = 0$, а $\vec{a}_{\beta\nu}$ не зависят от времени.

Итак, в системе существуют связи, задаваемые выражениями (5.1) и (5.2). Предполагается, что эти связи независимы, то есть ни одна из них не является следствием остальных. Имеет смысл рассматривать только системы, в которых $3N - r - s \geqslant 1$, иначе система либо вообще не могла бы двигаться, либо движение было бы изначально определено связями.

По характеру связей можно классифицировать системы материальных точек.

Система из N материальных точек называется **голономной**, если она либо свободна, либо у неё нет дифференциальных неинтегрируемых связей. В голономной системе все связи, если они существуют, являются геометрическими. Если у системы имеется хотя бы одна дифференциальная неинтегрируемая связь, то система называется **неголономной**.

Система называется **склерономной**, если она либо свободна, либо все её связи стационарны. Система называется **реономной**, если среди связей есть хотя бы одна нестационарная.

Теперь классифицируем некоторые рассмотренные примеры, используя введённые понятия.

- Система в примере 1 является голономной и склерономной.
- Система в примере 2 является голономной и реономной, поскольку связь не является стационарной.
- Система в примере 5 является неголономной и склерономной.

Итак, если система имеет связи, то её точки не могут занимать произвольные положения в пространстве и иметь произвольные скорости. Следующая лекция начнётся с обсуждения возможных перемещений, скоростей и ускорений.

! ***Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на*** `pulsar@phystech. edu`