ЛЕКЦИЯ 5

ВИРТУАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ. АКСИОМЫ ДИНАМИКИ

1. Перемещения точек несвободной системы

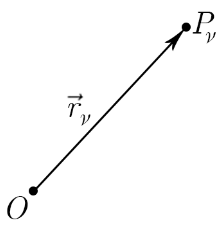

Рис. 5.1

Предположим, что имеется система материальных точек P_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Начало отсчёта обозначим как O, радиус-вектор точки P_ν — как $\vec{r}_\nu$. Если нет ограничений на координаты и скорости точек системы, то система называется свободной, в противном случае — несвободной.

В системе имеется r геометрических связей:

$$f_\alpha(\vec{r}_\nu, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r). \tag{5.1}$$

Также в системе есть s дифференциальных связей, линейных по всем скоростям:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{a}_{\beta\nu}\vec{v}_\nu + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s). \tag{5.2}$$

Все связи независимы, то есть ни одна из них не является следствием всех остальных. Зафиксируем момент времени $t = t^*$. Положение системы $\vec{r}_\nu = \vec{r}^{\,*}_\nu$ будем называть

возможным, или **кинематически возможным**, если в данный момент времени выполняется условие (5.1).

На скорости ограничения накладываются не только дифференциальными связями, но и геометрическими. Продифференцируем по времени соотношения (5.1):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_\nu} \vec{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, r). \tag{5.3}$$

Если в момент $t = t^*$ система занимает возможное положение, то скорости $\vec{v}_\nu = \vec{v}_\nu^*$ должны удовлетворять соотношениям (5.2) и (5.3). Так определяются **кинематически возможные скорости** системы. Число соотношений (5.2) и (5.3) равно $r + s$. Из независимости всех связей следует, что если рассмотреть соотношения (5.2) и (5.3) как систему уравнений на проекции скоростей, то ранг матрицы этой системы должен быть равен $r + s$.

Аналогично можно прийти к выводу, что ускорения точек тоже не могут быть произвольными. Для того чтобы получить ограничения на ускорения, нужно продифференцировать по времени соотношения (5.2) и (5.3):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_\nu} \vec{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_\nu} \vec{v}_\nu + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, r), \tag{5.4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{a}_{\beta\nu} \cdot \vec{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d\vec{a}_{\beta\nu}}{dt} \cdot \vec{v}_\nu + \frac{da_\beta}{dt} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \dots, s). \tag{5.5}$$

Ускорения, удовлетворяющие соотношениям (5.4) и (5.5), называются **кинематически возможными ускорениями**. Будем обозначать их как $\vec{w}_\nu^*$.

Итак, в момент времени t^* система занимает возможное положение $\vec{r}_\nu^*$, имеет множество возможных скоростей $\vec{v}_\nu^*$ и ускорений $\vec{w}_\nu^*$. В момент времени $t^* + \Delta t$ положение системы будет таким: $\vec{r} = \vec{r}_\nu^* + \Delta \vec{r}_\nu$, где

$$\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu^* \Delta t + \frac{1}{2} \vec{w}_\nu^* (\Delta t)^2 + \dots . \tag{5.6}$$

Величины (5.6) — это **возможные перемещения**, или **кинематически возможные перемещения** системы за время Δt. Пренебрежём в (5.6) величинами, порядок которых по Δt выше первого. Тогда $\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu^* \Delta t$. Для таких линейных соотношений можно выписать систему уравнений из (5.2) и (5.3). Для этого умножим обе части (5.2) и (5.3) на Δt.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_\nu} \Delta \vec{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, r), \tag{5.7}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{a}_{\beta\nu} \Delta \vec{r}_\nu + a_\beta \Delta t = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \dots, s). \tag{5.8}$$

Соотношения (5.7) и (5.8) определяют возможные перемещения, линейные по Δt. Заметим, что таких возможных перемещений бесконечное множество, поскольку всего координат $3N$, а связей — $r + s$, $3N - r - s \geqslant 1$. Какое из них в действительности происходит, зависит от начальных условий и сил, действующих в системе.

Поясним сказанное на следующем примере. Пусть задана неподвижная поверхность $f(x, y, z) = 0$ (рис. **??**). По ней движется одна материальная точка. Возможное перемещение — любой вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности движения: $\Delta\vec{r}\cdot\nabla f = 0$. Таких перемещений бесконечно много.

Пусть теперь поверхность движется со скоростью $\vec{u}$ (рис. 5.2). Чтобы в этом случае получить возможные перемещения, нужно к возможному перемещению для неподвижной плоскости прибавить $\vec{u}\,\Delta t$. Этих перемещений тоже бесконечно много, но они не лежат в касательной плоскости, если $\vec{u} \neq \vec{0}$.

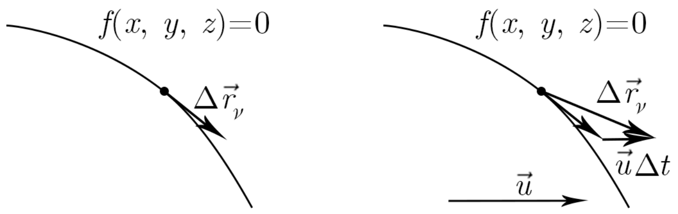

Рис. 5.2

Какое же из возможных перемещений является действительным? Выберем момент времени t^*, начальное положение системы $\vec{r}^*_{\nu 0}$. Скорости $\vec{v}_\nu$ также будут одними из возможных скоростей, обозначим их как $\vec{v}^*_{\nu 0}$. То же самое касается и ускорений $\vec{w}^*_{\nu 0}$. Пусть $t = t^* + dt$. Тогда

$$\vec{r}_\nu(t^* + dt) - \vec{r}^*_{\nu 0} = \vec{v}^*_{\nu 0}dt + \frac{1}{2}\vec{w}^*_{\nu 0}(dt)^2 + ... \tag{5.9}$$

Если отбросить нелинейные по dt слагаемые, то получим, что $d\vec{r}_\nu = \vec{v}^*_{\nu 0}dt$. Это уже действительное перемещение, являющееся одним из возможных за время dt. Для него тоже можно получить соотношения, аналогичные (5.7) и (5.8). Для этого умножим на dt равенства (5.2) и (5.3):

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_\nu}d\vec{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{5.10}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\vec{a}_{\beta\nu}d\vec{r}_\nu + a_\beta dt = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s). \tag{5.11}$$

Соотношения (5.10) и (5.11) очень похожи на соотношения (5.7) и (5.8). Однако они написаны для действительного перемещения системы.

2. Виртуальные перемещения. Синхронное варьирование

Пусть система в момент времени t^* занимает какое-то из кинематически возможных положений.

Определение 17: *Совокупность величин $\delta\vec{r}_\nu$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_\nu}\delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{5.12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{a}_{\beta\nu}\delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s), \tag{5.13}$$

*называется **виртуальным перемещением**.* ♣

Виртуальные перемещения определены в данный момент времени t^* и при данных скоростях $\vec{v}_\nu^*$. Как правило, они предполагаются бесконечно малыми, но, как видно из соотношений (5.12) и (5.13), они могут быть любой величины.

Вектор виртуального перемещения $\delta\vec{r}_\nu = \begin{pmatrix}\delta x_\nu \\ \delta y_\nu \\ \delta z_\nu\end{pmatrix}$. Всего существует $3N$ таких векторов. Число уравнений, которым удовлетворяют виртуальные перемещения, равно $r + s$. Значит, в данный момент времени и при данных скоростях размерность множества виртуальных перемещений равна $3N - r - s \geqslant 1$, а самих виртуальных перемещений бесконечно много. Величины δx_ν, δy_ν и δz_ν также называются **вариациями координат**.

Сравним соотношения (5.10) и (5.11) с соотношениями (5.12) и (5.13). Если система склерономна, то слагаемых с dt в (5.10) и (5.11) нет, и уравнения для действительных и виртуальных перемещений совпадают. Таким образом, из равенств (5.10), (5.11), (5.12) и (5.13) следует, что *для склерономной системы действительное движение является одним из виртуальных.*

Теперь сравним соотношения (5.12) и (5.13) с соотношениями (5.7) и (5.8). Соотношения (5.7) и (5.8) — это уравнения для возможных перемещений системы. Предположим, что система склерономна. Тогда соотношения (5.12) и (5.13) отличаются от соотношений (5.7) и (5.8) только обозначениями. Таким образом, *в склерономной системе виртуальные перемещения и возможные перемещения (в линейном по времени приближении) совпадают.*

Получается, что в общем случае виртуальные перемещения — это возможные перемещения при «замороженных» связях. Они таковы, как если в момент времени t^* зафиксировать это значение t в уравнениях связи. Чтобы проиллюстрировать это, вернёмся к примерам с неподвижной и подвижной поверхностями. Виртуальные перемещения в обоих случаях одинаковы и лежат в касательной плоскости к поверхности в той точке, где находится материальная точка в момент времени t^*. Следует подчеркнуть, что виртуальные перемещения не являются настоящими перемещениями; это понятие, вводящееся в методических целях и облегчающее построение теории.

Определение 18: *Переход от положения $\vec{r}_\nu$ к положению $\vec{r}_\nu + \delta\vec{r}_\nu$ называется **синхронным варьированием**.* ♣

Синхронное варьирование не есть действительное движение. Оно определяет, какое положение система может занять в бесконечно близкий момент времени, если все связи в системе «заморожены».

3. Число степеней свободы

Количество вариаций координат δx_ν, δy_ν и δz_ν равно $3N$. Количество уравнений связи — $r+s$. Из всех вариаций координат независимых ровно $3N-r-s=n$. Это число и называется **числом степеней свободы** системы.

Определение 19: *Число степеней свободы n — это количество независимых виртуальных перемещений.* ♣

Приведём несколько примеров.

- Одна материальная точка, свободно движущаяся в пространстве, имеет 3 степени свободы.
- Твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет 1 степень свободы.
- Твёрдое тело, имеющее одну неподвижную точку, имеет 3 степени свободы.
- Твёрдое тело, свободно движущееся в пространстве, имеет 6 степеней свободы.

Определение 20: *Наименьшее количество параметров, задание которых однозначно определяет положение системы, называется* ***числом независимых обобщённых координат****.* ♣

В системе, состоящей из N материальных точек, имеется $3N$ координат. Эти координаты должны удовлетворять геометрическим связям (5.1). Значит, число обобщённых координат $m=3N-r$.

Можно выбрать какие-то параметры $q_1,\ldots,q_m$, например, криволинейные координаты, через которые $\vec{r}_\nu$ может однозначно выражаться:

$$\vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(q_1,\ldots,q_m,t) \qquad \nu=1,2,\ldots,N. \tag{5.14}$$

Выбор возможных параметров q_i может быть очень широким. Нужно только, чтобы они описывали все кинематически возможные положения системы, которые могут быть в данной задаче. Функции (5.14) должны быть такими, что если подставить их в (5.1), получатся тождества. Впредь будем считать, что все эти функции дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. В данном курсе никакие другие функции не понадобятся. Также из соображений целесообразности можно сформулировать такое условие: если система склерономна, то обобщённые координаты следует выбирать так, чтобы функции (5.14) не зависели от времени.

Итак, возможные положения системы определяются параметрами $q_1,\ldots,q_m$. При этом система может быть весьма сложной, а геометрически можно представить её в очень простом виде. Построим систему координат $q_1,\ldots,q_m$ в m-мерном пространстве. Тогда состояние системы — это точка в этом пространстве (рис. 5.3). Если система движется, то точка, представляющая систему, описывает какую-то кривую в этом пространстве. Величины $q_1,\ldots,q_m$ называются **обобщёнными координатами**. Их производные по времени $\dot{q}_i$ называются **обобщёнными скоростями**. Двойные производные по времени $\ddot{q}_i$ называются **обобщёнными ускорениями**.

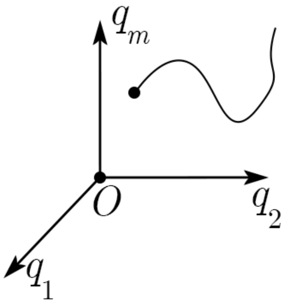

Рис. 5.3

У голономной системы число степеней свободы и число обобщённых координат совпадают. Это следует из того, что если $s = 0$, то $m = n = 3N - r$. У неголономной системы число степеней свободы меньше числа обобщённых координат: $n = m - s = 3N - r - s$.

Для виртуальных перемещений справедливо равенство

$$\delta\vec{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{5.15}$$

Величины δq_j называются **вариациями обобщённых координат**. У голономной системы эти вариации независимы и могут быть произвольными. У неголономной системы они связаны s соотношениями, соответствующими дифференциальным неинтегрируемым связям.

На этом рассмотрение кинематики в данном курсе заканчивается.

4. Динамика

Определение 21: Динамика *— это раздел теоретической механики, который изучает движение в связи с причинами, вызывающими, или изменяющими это движение.*♣

Эти причины называются **силами**.

Определение 22: Сила *— это количественная мера воздействия одной материальной точки на другую, в результате которого материальные точки, их которых состоят тела, приобретают ускорение, или тела деформируются.* ♣

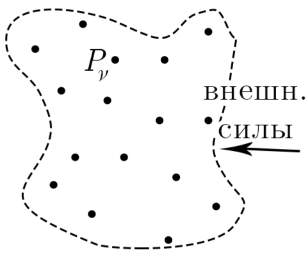

Рис. 5.4

Динамика опирается на ряд аксиом, справедливость которых обосновывается путём наблюдений и экспериментов. Введём ещё несколько понятий, прежде чем сформулировать эти аксиомы.

Пусть система состоит из материальных точек P_ν. Силы, с которыми взаимодействуют точки системы между собой, называются **внутренними**. Силы, с которыми действуют на точки системы точки, не входящие в данную систему, называются **внешними**. Если внешние силы на систему не действуют, то она называется **замкнутой**. Замкнутая система, состоящая из одной материальной точки, называется **изолированной материальной точкой**.

Аксиома 1 (Аксиома инерции, или аксиома существования инерциальных систем отсч
Существуют такие системы отсчёта, относительно которых изолированная материальная точка движется равномерно и прямолинейно. *

Системы отсчёта, о которых идёт речь в этой аксиоме, называются **инерциальными** или **галилеевыми**. Разумеется, если существует одна такая система, то их существует бесконечное множество: любая другая система отсчёта, которая относительно неё покоится или движется равномерно и прямолинейно, также является инерциальной. Первую аксиому можно сформулировать в виде **принципа относительности Галилея**: *все законы, установленные в одной инерциальной системе отсчёта, не изменяются при переходе к другой инерциальной системе отсчёта.*

В действительности инерциальных систем нет, но выводы из теории, построенной с учётом понятия инерциальных систем, с большой точностью совпадают с экспериментальными данными. Например, можно считать инерциальной системой такую систему: начало координат находится в центре масс Солнечной системы, а оси направлены на неподвижные звёзды. Строго говоря, и звёзды не являются неподвижными, но по сравнению с характерными временами изучаемых процессов их движением можно пренебречь. В некоторых задачах можно считать инерциальной систему отсчёта, связанную с Землёй.

Способность точки сопротивляться изменению скорости называется **инертностью** точки. Количественная мера инертности точки называется **массой**. Это скалярная положительная величина, обладающая свойством аддитивности. Чаще всего она будет обозначаться буквой m.

Второй закон Ньютона *В инерциальной системе отсчёта выполняется равенство —* ***второй закон Ньютона****:*

$$m\vec{w} = \vec{F}. \tag{5.16}$$

♣

Сила характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. В классической механике сила есть функция только от координат, скорости и времени, но не от ускорения: $F = F(\vec{r}, \vec{v}, t)$.

Третий закон Ньютона *Силы, с которой взаимодействуют две точки, равны по величине, противоположны по направлению и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки.* ♣

Если одна точка действует на вторую, то и вторая обязательно действует на первую, причём с такой же по модулю силой.

Аксиома 2 (Аксиома сложения сил) Пусть на одну материальную точку массой m действует несколько сил $\vec{F}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда в результате точкой приобретается ускорение $\vec{w} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{1}{m} \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. $*$

Иными словами, эта аксиома заключается в том, что все силы, действующие на точку, действуют независимо и сообщают ей ускорения, которые потом складываются обычным образом. Можно ввести результирующую силу $\vec{F} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, тогда её действие будет эквивалентно действию совокупности сил $\vec{F}_i$. Эта сила $\vec{F}$ называется **равнодействующей** сил $\vec{F}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Предположим, что на материальную точку массой m_ν действует силы с равнодействующей $\vec{F}_\nu$. Тогда, если система свободна, то $\ddot{\vec{r}}_\nu = \frac{\vec{F}_\nu}{m_\nu}$. Если же в системе есть связи, то они накладывают ограничения на возможные ускорения, и $\vec{w}_\nu \neq \ddot{\vec{r}}_\nu$ Значит, наличие связей приводит к появлению дополнительных сил, действующих на точку. Обозначим равнодействующую эти сил как $\vec{R}_\nu = m\left(\vec{w}_\nu - \ddot{\vec{r}}_\nu\right)$. Она называется **равнодействующей реакций связей**. $\vec{F}_\nu$ называется **равнодействующей активных сил**. Тогда

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu \qquad \nu = 1, 2, \dots, N. \tag{5.17}$$

Аксиома 3 (Аксиома об освобождении от связей) Систему со связями можно считать свободной, заменив при этом их действие на точки системы реакциями. $*$

В классической механике существует **принцип полной детерминированности движения Ньютона – Лапласа**. Он гласит, что *если заданы начальные положения $\vec{r}_{\nu 0}$ точек системы, их начальные скорости $\vec{v}_{\nu 0}$ и силы, действующие на точки системы, то можно вычислить положения $\vec{r}_\nu(t)$ и скорости $\vec{v}_\nu(t)$ точек системы в любой последующий момент времени.*

В динамике рассматриваются два типа задач. В первом их них заданы силы, действующие на систему, требуется найти её движение. Второй является обратным к первому: задано движение системы, требуется найти силы, которые бы его вызывали.

Важный раздел динамики — **статика**. Она изучает частный случай движения — равновесие.

Определение 23: *Под* ***положением равновесия системы*** *понимается такое положение системы, что система вечно остаётся в нём, если начальные скорости всех точек равны нулю.* ♣

В статике тоже рассматриваются два типа задач. В первом из них необходимо найти условия равновесия. Второй тип — задачи на приведение сил, то есть о замене данной системы сил другой, возможно, более простой системой сил, которая вызывает такое же движение, как и все силы в совокупности.

Теперь, когда сформулированы аксиомы динамики, можно перейти к рассмотрению сил, моментов сил, других динамических величин. Этому будут посвящены следующие лекции.