# ЛЕКЦИЯ 6

# МОМЕНТ СИЛЫ. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РАБОТА СИЛ СИСТЕМЫ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. ОБОБЩЁННЫЕ СИЛЫ. ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ. ЦЕНТР МАСС

## 1. Главный вектор системы сил

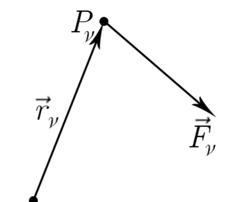


Рис. 6.1

Предположим, что имеется система материальных точек $P_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Начало отсчёта обозначим как $O$, радиус-вектор точки $P_\nu$ — как $\vec{[h]}_\nu$. Обозначим как $\vec{F}_\nu$ равнодействующую всех сил, приложенных к точке $P_\nu$ (рис. 6.1). Представим её в виде $\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)}$, где $\vec{F}_\nu^{(e)}$ — равнодействующая всех внешних сил, а $\vec{F}_\nu^{(i)}$ — равнодействующая всех внутренних сил. Реакции связей в $\vec{F}_\nu$ уже учтены.

***Определение 24: Главным вектором системы сил*** *называется вектор, равный сумме всех сил в системе:* $\vec{[h]} = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu$. ♣

Главный вектор сил системы можно представить в виде

$$\vec{[h]} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_{\nu}^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_{\nu}^{(i)}. \tag{6.1}$$

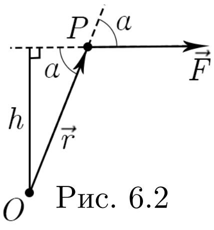


Рис. 6.2

По третьему закону Ньютона сумма всех внутренних сил системы тождественно равна нулю. Поэтому главный вектор сил системы совпадает с главным вектором внешних сил: $\vec{[h]} = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{F}_{\nu}^{(e)}$.

## 2. Момент силы относительно точки и относительно оси

Пусть к точке $P$ с радиус-вектором $\vec{[h]}$ приложена сила $\vec{F}$.

***Определение 25: Моментом силы относительно точки*** *$O$ называется векторное произведение $\vec{[h]}$ и $\vec{F}$: $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{[h]} \times \vec{F}$.* ♣

Обозначим расстояние от точки $O$ до линии действия силы $\vec{F}$ как $h$ (рис. 6.2). Эта величина называется **плечом силы**. Угол между векторами $\vec{[h]}$ и $\vec{F}$ обозначим как $\alpha$. Тогда $|\vec{m}_O(\vec{F})| = Fr\sin\alpha = Fh$.

***Определение 26: Моментом силы относительно оси*** *называется проекция момента силы относительно произвольной точки, взятой на оси, на эту ось.* ♣

Нетрудно показать, что эта проекция не зависит от выбора точки на оси.

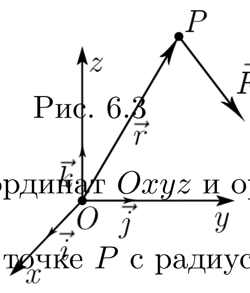


Рис. 6.3

Введём неподвижную систему координат $Oxyz$ и орты $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ по осям $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно. Сила $\vec{F}$ приложена к точке $P$ с радиус-вектором $\vec{[h]} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Сама сила имеет координаты $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$. Вычислим момент силы относительно точки $O$:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{[h]} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}. \tag{6.2}$$

При этом $M_x$ — момент силы $\vec{F}$ относительно оси $Ox$, $M_y$ — момент силы $\vec{F}$ относительно оси $Oy$, а $M_z$ — момент силы $\vec{F}$ относительно оси $Oz$.

$$M_x = yF_z - zF_y, \quad M_y = zF_x - xF_z, \quad M_z = xF_y - yF_x. \tag{6.3}$$

Момент силы относительно оси равен нулю, если модуль силы равен нулю или если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости. В последнем случае ось и линия действия силы либо параллельны, либо пересекаются.

***Определение 27:*** ***Главный момент системы сил относительно точки*** *$O$ — это вектор $\vec{M}_O$, равный сумме моментов всех сил системы.* ♣

Очевидно, что главный момент системы сил равен сумме моментов только внешних сил:

$$\vec{M}_O = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{m}_O(\vec{F}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{[h]}_\nu \times \vec{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{[h]}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(e)}. \tag{6.4}$$

***Определение 28:*** ***Главным моментом системы сил относительно оси*** *называется проекция на эту ось главного момента системы сил относительно произвольной точки, взятой на оси.* ♣

Эта проекция также не зависит от выбора точки на оси.

# 3. Элементарная работа сил системы

***Определение 29:*** *Пусть точка $P_\nu$ переместилась на $d\vec{[h]}_\nu$. Тогда* ***элементарной работой силы*** *$\vec{F}_\nu$ называется скалярное произведение $d'A_\nu = \vec{F}_\nu \cdot d\vec{[h]}_\nu$.* ♣

Если расписать по компонентам, получим, что $d'A_\nu = F_{\nu_x} dx_\nu + F_{\nu_y} dy_\nu + F_{\nu_z} dz_\nu$. Важно понимать, что здесь $d'A$ — это не дифференциал величины $A$, это просто бесконечно малая величина, называемая элементарной работой.

Элементарная работа всех сил системы — это величина $d'A = \sum\limits_{\nu=1}^{N} d'A_\nu$. Следует разбить её на сумму внешних и внутренних сил, причём внутренние силы не обязательно дают нулевую работу: $d'A = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}$.

Есть важный случай, когда внутренние силы не совершают работы.

# 4. Элементарная работа сил, приложенных к твёрдому телу

Пусть твёрдое тело состоит из точек $P_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, N$, $N \geqslant 2$. Силы, порождаемые связями между точками, заставляют все точки твёрдого тела оставаться на одинаковом расстоянии друг от друга. Эти силы, являющиеся внутренними, работы не совершают. Найдём работу всех сил, приложенных к точкам твёрдого тела. Перемещение точки $P_\nu$ $d\vec{[h]}_\nu = \vec{v}_\nu dt$. Скорость точки $P_\nu$ вычисляется так:

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{[h]}_\nu. \tag{6.5}$$

$$d'A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{[h]}_\nu\right)\, dt = \left(\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu\right) \vec{v}_O\, dt + \left(\sum_{\nu=1}^{N} \vec{[h]}_\nu \times \vec{F}_\nu\right) \vec{\omega}\, dt. \tag{6.6}$$

В первом слагаемом в (6.6) стоит сумма всех сил системы, которая равна главному вектору внешних сил. Во втором слагаемом сумма в скобках равна главному моменту внешних сил $\vec{M}_O^{(e)}$. Таким образом,

$$\boxed{d'A = \vec{[h]}^{(e)} \cdot \vec{v}_O\, dt + \vec{M}_O \cdot \omega\, dt.} \tag{6.7}$$

# 5. Силовое поле. Силовая функция. Потенциальная энергия

***Определение 30:*** *Пусть в пространстве или его части на помещённую туда точку действует сила, которая зависит только от координат точек системы и, может быть, от времени: $\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu(\vec{[h]}_1, \ldots, \vec{[h]}_N, t)$. Тогда говорят, что в пространстве или в его части задано **силовое поле**.* ♣

Например, таковым является электрическое поле между обкладками плоского конденсатора или гравитационное поле Земли. Важно, что сила, описывающаяся в определении, не зависит от скоростей точек системы.

***Определение 31:*** *Если существует такая функция $U(x, y, z, t)$, что*

$$F_{\nu_x} = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \quad F_{\nu_y} = \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \quad F_{\nu_z} = \frac{\partial U}{\partial z_\nu}, \tag{6.8}$$

*то силовое поля называется **потенциальным**, а функция $U$ называется **силовой функцией**.* ♣

***Определение 32:*** *Если силовое поле потенциально, то функция $\Pi \overset{\text{def}}{=} -U$ называется **потенциальной энергией**.* ♣

Заметим, что $\Pi$ — это греческая буква «пи», а не русская буква «пэ», поэтому и произносить её нужно как «пи».

***Определение 33:*** *Если $\Pi$ не зависит явно от времени, а зависит только от координат, то потенциальное поле называется **стационарным**, в противном случае оно **нестационарно**.* ♣

Найдём работу сил системы в потенциальном поле. Из выражения (6.8) следует, что $\vec{F}_\nu = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \vec{[h]}_\nu}$. Тогда

$$d'A = -\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_\nu}\, dx_\nu + \frac{\partial \Pi}{\partial y_\nu}\, dy_\nu + \frac{\partial \Pi}{\partial z_\nu}\, dz_\nu\right) = -d\Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial t}\, dt. \tag{6.9}$$

Если поле стационарно, то $\dfrac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$, и $d'A = -d\Pi$, и штрих в $d'A$ можно опустить: это действительно полный дифференциал. Если функция $\Pi$ однозначна, то работа силового поля не зависит от пути перемещения из начальной точки в конечную, а зависит только от положения этих точек. Однозначность потенциальной энергии является важным условием. Например, пусть $\Pi = \arctan \dfrac{x}{y}$. Эта функция неоднозначна, поэтому при обходе нулевой точки функция получает приращение $2\pi$.

Приведём примеры потенциальных полей, которые будут часто встречаться в задачах.

1). Однородное поле тяжести.

Пусть сила направлена вниз. Ускорение свободного падения обозначим как $\vec{g}$. Этот вектор постоянен и не зависит ни от координаты, ни от времени. Тогда $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_y = -mg$, где $m$ — масса точки. Потенциальная энергия $\Pi = mgz + C$, $C = \text{const}$. Константа определяется произвольно; например, если поставить условие, что $\Pi(z = 0) = 0$, то $C = 0$. Если направить ось $z$ вниз, то $F_z = mg$, а $\Pi = -mgz$.

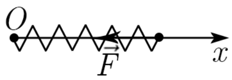


Рис. 6.4

2). Поле пружины.

Пусть в точке 0 пружина не растянута. Сила действует по оси $x$ и равна $-kx$, где $k$ — постоянная, называемая **жёсткостью пружины** или **коэффициентом упругости**. Потенциальная энергия $\Pi = \dfrac{1}{2}kx^2$.

3). Центральное силовое поле.

***Определение 34: Центральное силовое поле*** *— это такое поле, что на точку, помещённую в это поле, действует сила, линия действия которой проходит через фиксированную точку пространства.* ♣

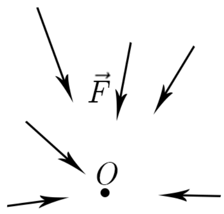


Рис. 6.5

Примером такого поля является поле тяготения, определяющееся законом всемирного тяготения Ньютона.

Рассмотрим частный случай, когда сила $\vec{[}h]$ зависит только от расстояния $r$: $\vec{F} = F(r)\dfrac{\vec{[}h]}{[}h]$. Если $F(r) > 0$, то это сила отталкивания, а если $F(r) < 0$, то это сила притяжения. Обозначим центральную точку поля как точку $O$. Вычислим работу при перемещении точки в центральном силовом поле.

$$dA = -d\Pi = \vec{F}\cdot d\vec{[h]} = F(r)\frac{\vec{[h]}\cdot\vec{[h]}}{[}h] = F(r)\frac{1}{2}\frac{d(\vec{[h]}^{\,2})}{[}h] = \frac{1}{2}F(r)\frac{dr^2}{[}h] = \frac{1}{2}F(r)\frac{2r\,dr}{[}h] = F(r)\,dr.$$
(6.10)

Таким образом, в случае центрального поля

$$\Pi = -\int F(r)\,dr + \mathrm{const.}^1 \tag{6.11}$$

Рассмотрим важнейший частный случай центрального поля — закон всемирного тяготения. В этом случае $F(r) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Значит, потенциальная энергия $\Pi = -\gamma\frac{m_1 m_2}{[}h]$.

## 6. Элементарная работа сил системы в обобщённых координатах. Обобщённые силы

Имеется система материальных точек $P_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, N$. Начало отсчёта обозначим как $O$, радиус-вектор точки $P_\nu$ — как $\vec{[h]}_\nu$. Обозначим как $\vec{F}_\nu$ равнодействующую всех сил, приложенных к точке $P_\nu$ (рис. 6.1).

Введём обобщённые координаты $q_1, q_2, \dots, q_m$. Тогда $\vec{[h]}_\nu = \vec{[h]}_\nu(q_1, \dots, q_m, t)$. Подсчитаем работу сил системы на виртуальных перемещениях:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{[h]}_\nu. \tag{6.12}$$

Виртуальные перемещения можно представить в виде вариации обобщённых координат:

$$\delta\vec{[h]}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{6.13}$$

Подставим это в выражение для работы:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \tag{6.14}$$

Выражение, стоящее в скобках в (6.14), назовём **обобщённой силой** и обозначим через $Q_j$, то есть,

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}. \tag{6.15}$$

Каждая обобщённая сила соответствует определённой обобщённой координате. С учётом (6.15), получаем

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j\,\delta q_j. \tag{6.16}$$

Если силы заданы в декартовых координатах, то обобщённые силы редко считают по формуле (6.15). Обычно поступают иначе. Положим, что $\delta q_j = 0$, если $j \neq k$. При $j = k$

$\delta A_k = Q_k\,\delta q_k$. Таким образом, обобщённую силу по определённой обобщённой координате можно найти, вычислив приращение работы при изменении только этой координаты: $\delta Q_k \dfrac{\delta A_k}{\delta q_k}$.

Пусть поле потенциально, потенциальная энергия $\Pi = \Pi(\vec{[h]}_1, \dots, \vec{[h]}_N, t)$. В этом случае силы определяются выражением $\vec{F}_\nu = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \vec{[h]}_\nu}$.

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \delta \vec{[h]}_\nu = -\delta\Pi. \tag{6.17}$$

В обобщённых координатах нужно получить выражение типа (6.16). Для этого выразим потенциальную энергию через обобщённые координаты.

$$\delta\Pi = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{6.18}$$

Значит,

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \dots, m). \tag{6.19}$$

Таким образом, если поле потенциально, то обобщённые силы вычисляются так же, как и обычные силы: взятием частной производной от потенциальной энергии по нужной обобщённой координате со знаком «минус».

Проведём вычисление обобщённых сил на нескольких несложных примерах.

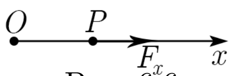

Рис. 6.6

1). Пусть точка $P$ движется вдоль оси $x$, и к ней приложена сила $F_x$ (рис. 6.6). Тогда приращение работы $\delta A = \delta A_x = F_x\,\delta x$. Поэтому $Q_x = F_x$.

2). Пусть твёрдое тело вращается вокруг оси $u$. К нему приложены какие-то силы. Обозначим главный момент этих сил относительно точки $O$, взятой на оси вращения, как $\vec{M}_O^{(e)}$ (рис. 6.7). За обобщённую координату примем угол поворота вокруг оси $u$. Вычислим работу сил:

$$\delta A = \vec{[h]}^{(e)} \vec{v}_O\,dt + \vec{M}_O^{(e)} \omega\,dt. \tag{6.20}$$

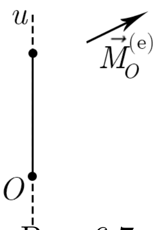

Рис. 6.7

Скорость точки $O$ равна нулю, поскольку она находится на оси вращения. Учитывая, что $\omega = \dot{\phi}$, получаем

$$\delta A = \vec{M}_u^{(e)} \delta\phi. \tag{6.21}$$

Поэтому по определению $Q_\phi = \vec{M}_u^{(e)}$. Заметим, что размерность обобщённой силы связана с размерностью соответствующей ей обобщённой координаты. Произведение обобщённой силы на обобщённую координату имеет размерность работы.

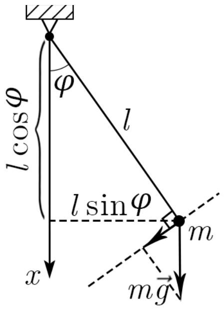


Рис. 6.8

3). Рассмотрим математический маятник. На невесомом нерастяжимом стержне длины $l$ закреплена точка массой $m$. На ней действует сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ (рис. 6.8). В качестве обобщённой координаты выберем угол поворота $\phi$. Проведём касательную к окружности движения массивной точки. Зададим приращение $\delta\phi$. При этом элементарное перемещение равно $l\,\delta\phi$. Проекция силы на касательную равна $-mg\sin\phi$. Тогда работа силы равна $\delta A = -mg\sin\phi\,\delta\phi$. Значит, $Q_\phi = -mgl\sin\phi$.

Получим для упражнения эту обобщённую силу ещё одним способом. Направим ось $x$ вниз. Тогда $\Pi = -mgx = -mgl\cos\phi$.

$$Q_\phi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = -mgl\sin\phi. \tag{6.22}$$

# 7. Идеальные связи

Этот раздел важен в методическом смысле, для понимания предмета изучения теоретической механики. Предположим, что имеется система материальных точек $P_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Начало отсчёта обозначим как $O$, радиус-вектор точки $P_\nu$ — как $\vec{[h]}_\nu$. Обозначим как $\vec{F}_\nu$ равнодействующую всех активных сил, приложенных к точке $P_\nu$. Пользуясь аксиомой об освобождении от связей, вводим реакции связей и их равнодействующую $\vec{[h]}_\nu$. Запишем второй закон Ньютона:

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{[h]}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.23}$$

Пусть в системе имеется $r$ геометрических и $s$ дифференциальных связей. Количество уравнений (6.23) равно $3N$. Количество уравнений связи — $r + s$. В то же время в системе содержится $6N$ неизвестных: $3N$ неизвестных координат и $3N$ неизвестных проекций реакций связи. Чтобы решить систему уравнений, нужно добавить $6N - (3N + r + s) = 3N - r - s$ уравнений. Для этого вводится понятие **идеальных связей**.

***Определение 35: Идеальные связи*** *— это такие связи, работа реакций которых на любых виртуальных перемещениях равна нулю:*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{[h]}_\nu \cdot \delta\vec{[h]}_\nu = 0. \tag{6.24}$$

♣

Независимых виртуальных перемещений столько же, сколько и степеней свободы, то есть $n = 3N - r - s$. Таким образом, введение идеальных связей добавляет нужное число уравнений в систему. Система становится теоретически разрешимой.

Проиллюстрируем понятие идеальной связи на нескольких примерах.

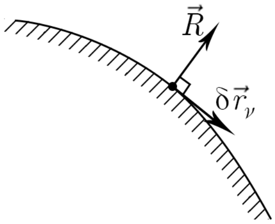


Рис. 6.9

1). Материальная точка движется по абсолютно гладкой поверхности (рис. 6.9). Виртуальные перемещения лежат в касательной плоскости, вне зависимости от скорости поверхности. На гладкой поверхности направление реакции всегда перпендикулярно касательной плоскости, так как трение отсутствует. Поэтому $\vec{[h]}\,\delta\vec{[h]} = 0$, значит, эта связь идеальная.

2). Пусть твёрдое тело движется вокруг неподвижной точки. Можно проинтерпретировать это так, будто в неподвижной точке есть сферический шарнир (рис. 6.10). В этой точке возникает реакция $\vec{[h]}$. Её направление зависит от вращения тела и приложенных к нему внешних сил. Но оно и не имеет значения, потому что условие $\vec{[h]}\,\delta\vec{[h]} = 0$ выполняется ввиду того, что $\delta\vec{[h]} = 0$. Значит, и эта связь является идеальной.

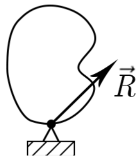


Рис. 6.10

3). Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси (рис. 6.7). Тогда реакции приложены к точкам этой оси, а они неподвижны. Скалярное произведение $\vec{[h]}\,\delta\vec{[h]} = 0$, поэтому эта связь тоже идеальна.

4). Пусть два тела, связанные сферическим шарниром, движутся в пространстве (рис. 6.11). Со стороны второго тела на первое действует реакция $\vec{[h]}_1$. Согласно третьему закону Ньютона, на второе тело со стороны первого действует реакция $\vec{[h]}_2 = -\vec{[h]}_1$. Тогда

$$\delta A = \vec{[h]}_1 \cdot \delta\vec{[h]}_1 + \vec{[h]}_2 \cdot \delta\vec{[h]}_2 = \vec{[h]}_1 \cdot (\delta\vec{[h]}_1 - \delta\vec{[h]}_2). \tag{6.25}$$

Но в точке с шарниром перемещения обоих тел одинаковы, поэтому $\delta\vec{[h]}_1 = \delta\vec{[h]}_2$, и $\delta A = 0$. Получаем, что эта связь тоже идеальна.

5). Пусть два тела движутся в пространстве, соприкасаясь абсолютно гладкими поверхностями (рис. 6.12). Трение отсутствует. Как и в предыдущем примере, реакции приложены к точке соприкосновения, равны по модулю и противоположны по направ-

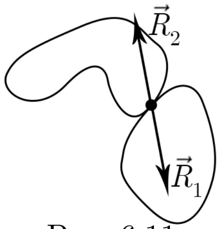


Рис. 6.11

лению. Но теперь они ортогональны касательной плоскости. Тогда

$$\delta A = \vec{[h]}_1 \cdot \delta(\vec{[h]}_1 - \vec{[h]}_2). \tag{6.26}$$

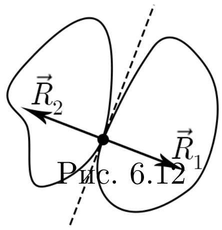


Рис. 6.12

Так как сомножители в скалярном произведении ортогональны, то $\delta A = 0$, значит, и эта связь является идеальной.

6). Пусть два тела соприкасаются абсолютно шероховатыми поверхностями, то есть скольжение отсутствует. Рисунок 6.11 подходит и для этого случая. Как и в предыдущем примере, реакции приложены к точке соприкосновения, равны по модулю и противоположны по направлению. Формула (6.26) справедлива и для этого случая. Но здесь, как и в примере 4, $\delta\vec{[h]}_1 = \delta\vec{[h]}_2$. Поэтому эта связь также является идеальной.

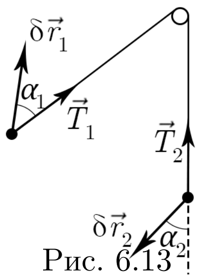


Рис. 6.13

7). Пусть две точки на плоскости связаны идеальной нитью — нерастяжимой нитью, не обладающей массой и не оказывающей сопротивления изменению формы. Нить перекинута через неподвижный стержень и натянута (рис. 6.13). Реакции нити — это силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, которые одинаковы по модулю, так как нить не обладает массой. Так как нить нерастяжима, то виртуальные перемещения $\delta\vec{[h]}_1$ и $\delta\vec{[h]}_2$ таковы, что $\delta r_1 \cos\alpha_1 = \delta r_2 \cos\alpha_2$, где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — углы, изображённые на рис. 6.13. Вычислим работу сил натяжения:

$$\delta A = \vec{T}_1\, \delta\vec{[h]}_1 + \vec{T}_2\, \delta\vec{[h]}_2 = T_1(\delta r_1 \cos\alpha_1 - \delta r_2 \cos\alpha_2) = 0, \tag{6.27}$$

из чего следует, что связь в этом примере идеальна.

Многие связи в природе и технике с той или иной точностью являются идеальными. На практике зачастую они могут таковыми считаться. Как показывают многочисленные примеры, связь может быть идеальной и когда поверхности абсолютно гладкие, и когда проскальзывание отсутствует. Более того, силу трения можно отнести к активным силам, тогда собственно реакция не будет совершать работу, поскольку она будет ортогональна перемещению точки соприкосновения.

# 8. Центр масс системы

Пусть система состоит из точек $P_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Начало отсчёта обозначим как $O$, радиус-вектор точки $P_\nu$ — как $\vec{[h]}_\nu$ (рис. 6.1). Точка $P_\nu$ обладает массой $m_\nu$.

***Определение 36:* Масса системы** *— это сумма масс всех точек системы:*

$$M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu. \tag{6.28}$$

♣

***Определение 37:* Центром масс** *или* **центром инерции** *системы называется точка пространства, которая определяется вектором* $\vec{[h]}_c = \dfrac{\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{[h]}_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu}$. ♣

Заметим, что центр масс не обязательно должен быть точкой системы. Например, центр масс однородного кольца находится в его центре, который самому кольцу не принадлежит.

***Определение 38:* Движением относительно центра масс** *называется движение относительно системы координат с началом в центре масс, которая покоится или движется поступательно.* ♣

Система координат, упоминавшаяся в определении, называется **кёниговой системой координат**. Это название связано с теоремой Кёнига, которая будет рассматриваться в одной из следующих лекций. Таких систем координат бесконечно много, они получаются с помощью поворотов вокруг центра масс.

На следующих лекциях будет излагаться важный раздел теоретической механики — **основные теоремы динамики**. Это теоремы об изменении **основных динамических величин**, в число которых входят **количество движения**, **импульс**, **кинетический момент** и **кинетическая энергия**. Эти теоремы будут изучаться в инерциальных системах отсчёта. Будет везде предполагаться, что массы всех точек системы постоянны.

Основные уравнения движения имеют вид

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)}. \tag{6.29}$$

При этом неважно, свободна ли система. Если она несвободна, то, пользуясь аксиомой об освобождении от связей, можно считать её свободной и одновременно ввести реакции связей, которые можно внести в равнодействующую сил.