ЛЕКЦИЯ 7

ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

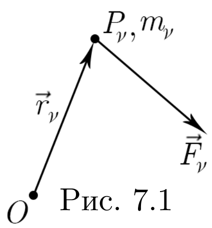


Рис. 7.1

Пусть система состоит из точек P_ν, $\nu = 1, 2, \dots, N$. Начало отсчёта обозначим как O, радиус-вектор точки P_ν — как $\vec{[h]}_\nu$. Точка P_ν обладает массой m_ν. Обозначим как $\vec{F}_\nu$ равнодействующую всех сил, приложенных к точке P_ν (рис. 7.1). Силу $\vec{F}_\nu$ разбиваем на два слагаемых, соответствующих равнодействующей внешних и внутренних сил: $\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)}$.

Все рассматриваемые уравнения написаны в инерциальных системах координат. Выпишем основные уравнения движения:

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)}. \tag{7.1}$$

Несмотря на то, что в курсе общей физики динамика изучалась, в теоретической механике имеются определённые тонкости, на которые следует обратить внимание.

В дальнейшем при рассмотрении определённой динамической величины, например, количества движения, кинетического момента и кинетической энергии, будут сначала описаны методы вычисления этой величины, а затем будет сформулирована теорема об изменении этой величины.

1. Количество движения

Определение 39: Количеством движения *системы называется величина*

$$\vec{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu. \tag{7.2}$$

♣

Займёмся вычислением количества движения. Вспомним, что по определению центра масс

$$M\vec{[h]}_\text{c} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{[h]}_\nu. \tag{7.3}$$

Продифференцируем обе части этого равенства по времени:

$$M\vec{v}_\text{c} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu = \vec{Q}. \tag{7.4}$$

Таким образом, количество движения можно вычислять по формуле $\vec{Q} = M\vec{v}_\text{c}$.

Рассмотрим кёнигову систему координат. Напомним, что это система координат с началом отсчёта в центре масс, движущаяся поступательно или покоящаяся. $\vec{v}_\nu$ — абсолютная скорость точки P_ν, а $\vec{v}_{\nu r}$ — скорость этой точки относительно осей Кёнига. Тогда количество движения в этой системе будет равно $\vec{Q}_r = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_{\nu r}$.

Покажем, что количество движения системы относительно центра масс равно нулю. В самом деле, абсолютная скорость точки по теореме о сложении скоростей равна сумме переносной и относительной скоростей. Переносная скорость равна скорости центра масс и одинакова для всех точек. Таким образом, $\vec{v}_\nu = \vec{v}_\text{c} + \vec{v}_{\nu r}$. Подставим это значение скорости в (7.2):

$$\vec{Q} = M\vec{v}_\text{c} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\vec{v}_\text{c} + \vec{v}_{\nu r}\right) = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right) \vec{v}_\text{c} + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_{\nu r} = M\vec{v}_\text{c} + \vec{Q}_r. \tag{7.5}$$

Из (7.5) следует, что $\vec{Q}_r = 0$, что и требовалось показать. Таким образом, количество движения системы характеризует движение центра масс.

Теорема 8 (Теорема об изменении количества движения) Производная по времени от количества движения системы равно главному вектору всех внешних сил системы:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{[h]}^{(e)}. \tag{7.6}$$

*

Док-во: Поскольку $\vec{Q} = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu$, то

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{w}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)}\right) = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} = \vec{[h]}^{(e)}. \tag{7.7}$$

■

Если система замкнута, то внешние силы отсутствуют. Тогда $\vec{[h]}^{(e)} = 0$, следовательно, количество движения постоянно. Из теоремы также следует, что если для некоторой оси x $R_x^{(e)} = 0$, то $Q_x = \text{const}$.

Теорема 7.1 была сформулирована в дифференциальной форме. Теперь сформулируем её в интегральной форме. Пусть задан интервал времени $[t_1, t_2]$. Проинтегрируем соотношение (7.6) по времени.

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{[h]}^{(e)} dt. \tag{7.8}$$

Интеграл от силы по времени — это **импульс силы**. Таким образом, *приращение вектора количества движения за конечное время равно импульсу внешних сил за это время.*

Теорема 9 (Теорема о движении центра масс)

$$M\vec{w}_{\text{c}} = \vec{[h]}^{(e)}. \tag{7.9}$$

*

Док-во: Утверждение теоремы получается, если подставить выражение $\vec{Q} = M\vec{v}_{\text{c}}$ в соотношение (7.6). ■

Из теоремы 7.2 следует важное утверждение: *центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка, обладающая массой всей системы, под действием внешних сил системы.* Если система замкнута, то $\vec{[h]}^{(e)} = 0$. Значит, в этом случае центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно. Если для какой-то оси x $R_x^{(e)} = 0$, то $v_{\text{c}_x} = \text{const}$.

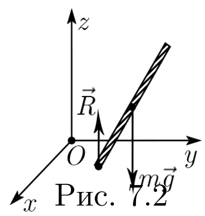


Рис. 7.2

Рассмотрим пример. Плоскость Oxy представляет собой твёрдый абсолютно гладкий пол. На него поставили стержень (рис. 7.2). В начальный момент его отпускают (возможно, толкнув его перед этим), и после этого он совершает довольно сложное движение. Так как трение отсутствует, то реакция пола вертикальна. На него стержень также действует сила тяжести, равная $m\vec{g}$ и направленная вертикально. Проекции всех сил на оси Ox и Oy равны нулю, поэтому проекция центра масс на плоскость Oxy движется равномерно и прямолинейно.

Нельзя одними внутренними силами изменить положение центра масс, если эти внутренние силы не вызывают внешние. По реальному полу можно ходить, потому что между подошвой обуви и полом существует трение. Таким образом, при ходьбе пешеход внутренними силами вызывает внешние силы — силы трения, которые и приводят к перемещению его центра масс.

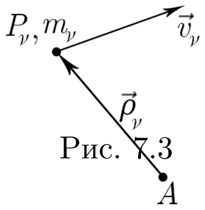


Рис. 7.3

2. Момент количества движения

Пусть система состоит из точек P_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Точка P_ν обладает массой m_ν и движется со скоростью $\vec{v}_\nu$. Выберем в пространстве произвольную точку A. Обозначим радиус-вектор точки P_ν относительно A как $\vec{\rho}_\nu$ (рис. 7.3).

***Определение 40: Моментом количества движения точки** P_ν **относительно точки** A называется величина $\vec{K}_{\nu A} = \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu$.* ♣

***Определение 41: Моментом количества движения точки относительно оси** называется проекция на эту ось момента количества движения относительно какой-либо точки оси.* ♣

Нетрудно показать, что эта проекция не зависит от выбора точки на оси. Момент количества движения также называется **кинетическим моментом**.

***Определение 42: Моментом количества движения системы относительно центра** A называется сумма моментов количества движения всех точек, входящих в систему, относительно точки A: $\vec{K}_A = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_n u \times m_\nu \vec{v}_\nu$.* ♣

***Определение 43: Моментом количества движения системы относительно оси** называется проекция на эту ось момента количества движения системы относительно какой-либо точки на этой оси.* ♣

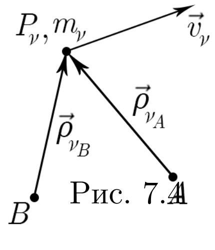


Рис. 7.4

Кинетический момент существенно зависит от выбора центра. Найдём явный вид этой зависимости. Возьмём две произвольные точки пространства A и B. Система состоит из точек P_ν с массами m_ν и скоростями $\vec{v}_\nu$. Радиус-векторы точек системы относительно точек A и B обозначим как $\vec{\rho}_{\nu_A}$ и $\vec{\rho}_{\nu_B}$ соответственно (рис. 7.4).

$$\begin{aligned} \vec{K}_B = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_{\nu_B} \times m_\nu \vec{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\overrightarrow{BA} + \vec{\rho}_{\nu_A}\right) \times m_\nu \vec{v}_\nu = \\ = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_{\nu_A} \times m_\nu \vec{v}_\nu + \overrightarrow{BA} \times \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu\right) = \vec{K}_A + \overrightarrow{BA} \times \vec{Q}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

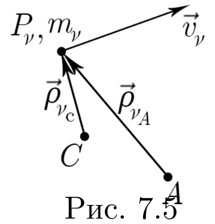


Рис. 7.5

Таким образом, кинетические моменты точек A и B связаны соотношением

$$\vec{B} = \vec{A} + \overrightarrow{BA} \times M\vec{v}_c. \tag{7.11}$$

При вычислении кинетического момента бывает полезно рассматривать движение точки как сложное, а именно как совокупность движения точки относительно кёниговой системы и движения самой кёниговой системы. Пусть имеется центр A, относительно которого требуется вычислить кинетический момент системы. Обозначим центр масс системы как C, а радиус вектор точки P_ν относительно центра масс как $\vec{\rho}_{\nu_c}$ (рис. 7.5). Определим величину $\vec{K}_{Cr} \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_{\nu_c} \times m_\nu \vec{v}_{\nu r}$. Это кинетический момент системы относительно центра масс в её движении относительно центра масс.

Теорема 10 (Теорема Кёнига о вычислении кинетического момента)

$$\vec{K}_A = \vec{K}_{Cr} + \overrightarrow{AC} \times M\vec{v}_c. \tag{7.12}$$

*

Док-во: Представим абсолютную скорость точки P_ν в виде $\vec{v}_\nu = \vec{v}_c + \vec{v}_{\nu r}$, где $\vec{v}_{\nu r}$ — скорость точки относительно центра масс.

$$\vec{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_{\nu_A} \times m_\nu \vec{v}_\nu. \tag{7.13}$$

Учитывая, что $\vec{\rho}_{\nu_A} = \overrightarrow{AC} + \vec{\rho}_{\nu_c}$, найдём связь между $\vec{K}_A$ и $\vec{K}_{cr}$:

$$\begin{gathered}\vec{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\overrightarrow{AC} + \vec{\rho}_{\nu_c}\right) \times m_\nu(\vec{v}_c + \vec{v}_{\nu r}) = \\ = \overrightarrow{AC} \times \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right) \vec{v}_c + \overrightarrow{AC} \times \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_{\nu r} + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{\rho}_{\nu_c}\right) \times \vec{v}_c + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_{\nu_c} \times m_\nu \vec{v}_{\nu r}.\end{gathered} \tag{7.14}$$

Последнее слагаемое в (7.14) — не что иное, как $\vec{K}_{Cr}$. Сумма в предпоследнем слагаемом равна нулю по определению центра масс. Сумма во втором слагаемом — это количество движения в системе центра масс, $Q_r = 0$. Сумма в первом слагаемом равна массе системы M. Таким образом,

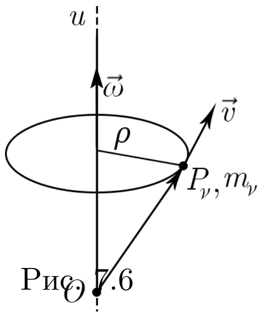
$$\vec{K}_C = \overrightarrow{AC} \times M\vec{v}_C + \vec{K}_{Cr}. \tag{7.15}$$

■

Таким образом, чтобы вычислить кинетический момент системы относительно какой-либо точки A, нужно знать кинетический момент в кёниговой системе координат $\vec{K}_{C\,r}$ и вектор количества движения $\vec{Q}$. Формула (7.12) также называется **формулой Кёнига**.

Пусть точка A совпадает с точкой C. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, и $\vec{K}_A = \vec{K}_{\mathrm{C\,r}}$. Получается, что *кинетический момент относительно центра масс один и тот же для абсолютных и относительных скоростей.*

3. Момент инерции



3.33 cm Рис. 7.6

Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси. Любая точка тела P_ν вращается по своей окружности радиуса ρ_ν. Масса точки P_ν равна m_ν. Скорость этой точки направлена по касательной к окружности вращения (рис. 7.6). Тогда $K_z = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu \rho_\nu$. Так как $v_\nu = \omega_z \rho_\nu$, то $K_z = \left(\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2\right)\omega_z$.

Величина $J_z \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2$ называется **моментом инерции** твёрдого тела относительно оси вращения. Итак,

$$\boxed{K_z = J_z \omega_z.} \tag{7.16}$$

Напомним некоторые факты о моменте инерции, которые изучались в курсе общей физике, поскольку они важны для данной темы. Пусть система, состоящая из материальных точек P_ν, $\nu = 1, 2, \dots, N$, находится в состоянии мгновенного вращения вокруг оси u. Расстояние от точки P_ν до оси u обозначим как ρ_ν, а её масса равна m_ν (рис. 7.6). Тогда под моментом инерции системы относительно оси u будем понимать величину $J_u = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2$. Момент инерции всегда больше или равен нулю. Он обращается в ноль в предельном случае, когда все точки лежат на прямой u.

Если рассматривается твёрдое тело, то его нужно разбивать на малые объёмы и брать интеграл по всему объёму. Приведём примеры разных твёрдых тел и их моменты инерции.

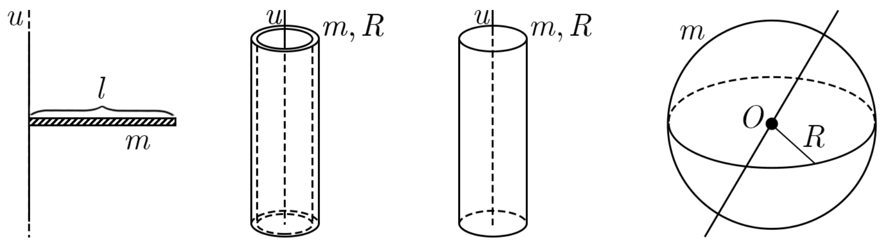


Рис. 7.7

1). Тонкий однородный стержень массы m и длины l вращается вокруг оси, перпендикулярной ему и проходящей через один из его концов (рис. **??**). Его момент инерции относительно этой оси равен $\dfrac{1}{3}ml^2$.

2). Тонкостенный однородный цилиндр радиусом R и массой m вращается вокруг оси симметрии, перпендикулярной его торцу (рис. 7.7). Его момент инерции относительно этой оси равен mR^2.

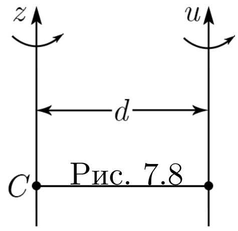


Рис. 7.8

3). Пусть теперь цилиндр не тонкостенный, а сплошной, даны его масса m и радиус R (рис. 7.7). Его момент инерции относительно той же оси равен $\frac{1}{2}mR^2$.

4). Однородный шар радиуса R и массой m вращается вокруг одной из осей, проходящей через его центр (рис. 7.7). Его момент инерции относительно этой оси равен $\frac{2}{5}mR^2$.

Теорема 11 (Теорема Гюйгенса–Штейнера, теорема Гюйгенса) Проведём ось z через центр масс системы. Возьмём другую ось u, параллельную оси z и находящуюся от неё на расстоянии d (рис. 7.8). Тогда моменты инерции системы относительно этих осей связаны соотношением $J_u = J_z + Md^2$, где M — полная масса системы. *

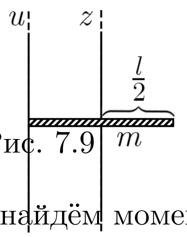


Рис. 7.9

2.26 cm

Применим эту теорему к примеру 1 и найдём момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр (рис. 7.9). Он равен $J_z = J_u - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}ml^2$.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть тонкий однородный диск радиуса R и массы m катится по горизонтальной прямой без скольжения. Скорость центра диска C равна $\vec{v}$. Введём систему координат с началом в точке C и движущуюся поступательно вместе с центром масс. Эта система координат $Cxyz$ и будет кёниговой системой координат. Угловая скорость вращения диска $\omega = \frac{v}{|}h]$.

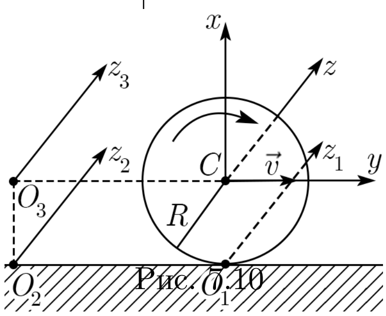


Рис. 7.10

а). Вычислим кинетический момент диска в его относительном движении $K^r_{C\,z}$. В кёниговой системе координат диск вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω. Значит, $K^r_{C\,z} = \frac{1}{2}mR^2\omega = \frac{1}{2}mvR$.

б). Обозначим точку касания диском прямой как O_1 и проведём через неё ось z_1, параллельную оси z. Вычислим кинетический момент диска относительно оси z_1. В данный момент времени точка O_1 — мгновенный центр скоростей. Значит, скорости точек таковы, как если диск вращается вокруг оси z_1 с угловой скоростью ω. По теореме Гюйгенса – Штейнера

$$K_{O_1 z} = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\omega = \frac{3}{2}mvR. \tag{7.17}$$

Для того чтобы получить результат (7.17), можно было бы применить формулу Кёнига:

$$K_{O_1 z} = K^r_{C\,z} + mvR = \frac{1}{2}mvR + mvR = \frac{3}{2}mvR. \tag{7.18}$$

в). Теперь выберем на прямой другую точку O_2 и проведём через неё ось z_2, параллельную оси z. Вычислим кинетический момент диска относительно оси z_2.

$$K_{O_2 z} = K^r_{C\,z} + mvR = \frac{3}{2}mvR. \tag{7.19}$$

г). Обозначим точку, находящуюся на расстоянии R по оси x от O_2, как O_3. Проведём через неё ось z_3, параллельную оси z. Тогда кинетический момент диска относительно оси z_3 $K_{O_3 z} = \dfrac{1}{2}mvR$, потому что вектор количества движения проходит через точку O_3 и, следовательно, не создаёт добавки к кинетическому моменту в этой точке.

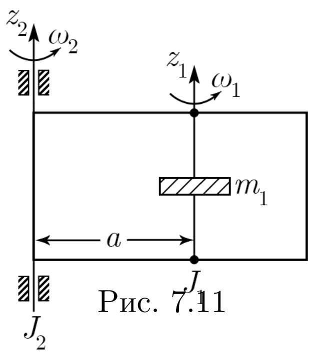


Рис. 7.11

Рассмотрим ещё одну задачу. Однородная прямоугольная рамка вращается вокруг оси z_2, проходящей через одну из её сторон, с угловой скоростью ω_2 (рис. 7.11). Момент инерции рамки вокруг этой оси известен и равен J_2.

В этой рамке на вертикальной проволоке закреплён однородный диск, который может вращаться вокруг оси z_1, проходящей через центр диска и параллельной z_2. Его угловая скорость относительно рамки равна ω_1. Момент инерции диска относительно оси его вращения равен J_1. Расстояние между осями z_2 и z_1 равно a, масса диска равна m_1. Требуется найти кинетический момент этой системы относительно оси z_2.

Вычислим кинетический момент диска относительно оси z_2, применяя теорему Кёнига. Он равен сумме кинетического момента диска относительно z_1 и $m_1\omega_2 a \cdot a$. Кёнигова система координат связана с диском и движется поступательно, поэтому в ней угловая скорость диска равна $\omega_1 + \omega_2$. $\omega_2 a$ — скорость центра масс диска относительно неподвижной системы координат, $m_1\omega_2 a$ — количество движения диска в той же системе координат. В итоге получаем, что

$$K_{z_2} = J_2\omega_2 + J_1(\omega_1 + \omega_2) + m_1\omega_2 a^2 = (J_1 + J_2 + ma^2)\,\omega_2 + J_1\omega_1. \tag{7.20}$$

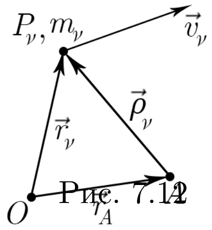


Рис. 7.12

Снова рассмотрим систему, состоящую из материальных точек P_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Точка P_ν относительно начала координат O имеет радиус-вектор $\vec{[h]}_\nu$, обладает массой m_ν и движется со скоростью $\vec{v}_\nu$. Выберем в пространстве произвольную точку A. Обозначим радиус-вектор точки P_ν относительно A как $\vec{\rho}_\nu$ (рис. 7.12).

Теорема 12 (Теорема об изменении кинетического момента)

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^{(e)} + M\vec{v}_C \times \vec{v}_A. \tag{7.21}$$

*

Док-во: Запишем выражение для кинетического момента системы относительно точки A:

$$\vec{K}_A = \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu. \tag{7.22}$$

Обозначим вектор $\overline{OA}$ как $\vec{[h]}_A$. Тогда $\vec{\rho}_\nu = \vec{[h]}_\nu - \vec{[h]}_A$. Возьмём производную от (7.22) по времени:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{K}_A}{dt} &= \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{v}_\nu - \vec{v}_A) \times m_\nu \vec{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{w}_\nu = \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} \vec{v}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu \right) \times \vec{v}_A + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_\nu \times \left(\vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)} \right).\end{aligned} \tag{7.23}$$

Первое слагаемое в (7.23) равно нулю, поскольку содержит векторное произведение одинаковых векторов. Во втором слагаемом в скобке стоит $\vec{Q} = M\vec{v}_C$. Третье слагаемое представляет собой главный момент всех сил системы, совпадающий с главным моментов внешних сил. В итоге

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = M\vec{v}_C \times \vec{v}_A + \vec{M}_A^{(e)}. \tag{7.24}$$

■

Пусть центр A неподвижен. Тогда $\vec{v}_A = 0$, следовательно,

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^{(e)}. \tag{7.25}$$

Производная от кинетического момента относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил относительно этого центра.

Пусть система замкнута. Тогда внешние силы отсутствуют, и кинетический момент сохраняется.

Заметим, что внутренние силы могут изменить кинетический момент системы, если они вызывают внешние силы. Поэтому на полу с трением человек может без проблем начать вращать рукой, но вот на абсолютно гладком полу он бы сам смещался в противоположную направлению движения руки сторону, и суммарный кинетический момент был бы постоянным.

Ещё один пример закона сохранения кинетического момента — классический опыт с курса общей физики, известный как скамейка Жуковского. В этом опыте угловая скорость вращения платформы вместе с сидящим на ней человеком зависит от того, раскинул человек руки в стороны или сложил их вместе.

Если главный момент внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси равна нулю, то проекция кинетического момента на эту ось сохраняется.

Сформулируем теорему об изменении кинетического момента в интегральной форме. Для этого проинтегрируем равенство (7.25) по времени от t_1 до t_2:

$$\Delta\vec{K}_A = (\vec{K}_A)_2 - (\vec{K}_A)_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{M}_A^{(e)} dt. \tag{7.26}$$

Величина $\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{M}_A^{(e)} dt$ называется **импульсом момента внешних сил за промежуток времени** $[t_1, t_2]$. Таким образом, *приращение кинетического момента системы относительно неподвижного центра A за конечный промежуток времени равно импульсу момента внешних сил относительно центра A за этот промежуток времени.*

Теорема 13 (Теорема об изменении кинетического момента для движения относитель
Выберем в качестве центра A центр масс. Тогда

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)}. \tag{7.27}$$

*

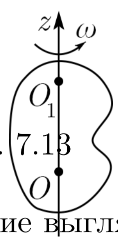


Рис. 7.13

Видно, что для центра масс соотношение выглядит так же, как и равенство (7.25) для неподвижной точки. Кроме того, кинетический момент одинаков для абсолютных и относительных скоростей, поэтому в (7.27) вместо $\vec{K}_C$ можно подставить $\vec{K}_{C\,r}$.

Рассмотрим ещё два примера.

1). Получим дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси (рис. 7.13). Обозначим неподвижную ось как OO_1. Угол поворота тела вокруг этой оси ϕ, угловая скорость — $\omega = \dot{\phi}$. К телу приложен момент внешних сил $\vec{M}_O^{(e)}$. Тогда $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(e)}$. Спроецируем это равенство на ось z: $\dfrac{dK_z}{dt} = M_z$, где M_z — проекция момента внешних сил на ось z (индекс $^{(e)}$ для краткости опускается). Поскольку

$K_z = J_z\omega = J_z\dot{\phi}$, то уравнение вращения твёрдого тела выглядит так:

$$\boxed{J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z,} \qquad \text{или} J_z\frac{d^2\phi}{dt^2} = M_z. \tag{7.28}$$

Видно, что это уравнение по форме аналогично второму закону Ньютона. Так что можно сказать, что раз масса — мера инертности точки или системы при её поступательном движении, то момент инерции системы относительно оси — это мера её инертности при вращении вокруг этой оси.

2). Получим дифференциальное уравнение плоского движения твёрдого тела. Соотношения (7.6) и (7.25) — это 6 скалярных уравнений. Это основные соотношения в динамике, в них содержится вся информация о движении системы. Применим их для описания плоского движения.

Напомним, что плоское движение твёрдого тела имеет место, когда скорости всех точек тела параллельны некоторой фиксированной плоскости. Такое движение можно изучать как движение плоской фигуры в её плоскости.

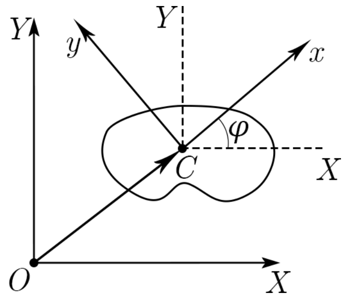


Рис. 7.14

Введём в плоскости движения неподвижную система отсчёта OXY. Обозначим сечение твёрдого тела этой плоскостью и центр масс C (рис. 7.14). Проведём через точку C оси Кёнига CX и CY, параллельные осям OX и OY. С твёрдым телом свяжем систему отсчёта Cxy, вращающуюся вместе с ним. Обозначим угол между осями CX и Cx как ϕ.

Положение твёрдого тела задаётся тремя величинами: X_C, Y_C и ϕ. Запишем уравнения движения:

$$m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{[}h]^{(e)}, \tag{7.29}$$

$$m\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}^{(e)}, \tag{7.30}$$

причём вместо $\vec{K}_C$ можно писать $\vec{K}_{C\,r}$. Обозначим момент инерции твёрдого тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения, как J_c. Тогда $K_{C\,Z} = J_c\dot{\phi}$. Запишем уравнения движения в скалярной форме.

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = R_x^{(e)}, \\ M\ddot{y}_C = R_y^{(e)}, \\ J_c\ddot{\phi} = M_z. \end{cases} \tag{7.31}$$

Первые два уравнения описывают движение центра масс твёрдого тела, а последнее — вращение вокруг оси, проходящей через центр масс. В общем случае они не являются тремя независимыми уравнениями, потому что $\vec{[h]}^{(e)}$ и M_z могут зависеть от X_C, Y_C и ϕ.