ЛЕКЦИЯ 8

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

Рассмотрим ещё одну важную динамическую величину — **кинетическую энергию**. Пусть система состоит из точек P_ν, $\nu = 1, 2, \dots, N$. Начало отсчёта обозначим как O, радиус-вектор точки P_ν — как $\vec{[h]}_\nu$. Точка P_ν обладает массой m_ν и движется со скоростью $\vec{v}_\nu$ (рис. 8.1).

Определение 44: Кинетической энергией *системы называется величина T, вычисляемая по формуле $T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2$.* ♣

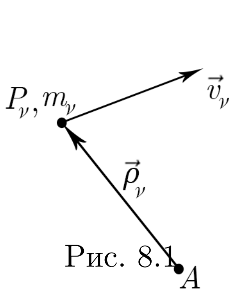


Рис. 8.1

Для вычисления кинетической энергии часто применяется **теорема Кёнига о вычислении кинетической энергии** (теорема Кёнига о вычислении кинетического момента, рассматривавшаяся на прошлой лекции — другая теорема, не следует их путать).

Введём кёнигову систему координат, то есть такую систему координат, начало которой совпадает с центром масс системы, и которая покоится или движется поступательно. Тогда скорость точки P_ν $\vec{v}_\nu = \vec{v}_C + \vec{v}_{\nu\, r}$, где $\vec{v}_{\nu\, r}$ — скорость точки в кёниговой системе координат.

Теорема 14 (Теорема Кёнига о вычислении кинетической энергии)

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + T_r, \tag{8.1}$$

где $T_r = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_{\nu r}^{\,2}$. *

Док-во:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\vec{v}_C + \vec{v}_{\nu r})^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right)v_C^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_{\nu r}\right)\cdot\vec{v}_C + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu r}^2. \tag{8.2}$$

В первом слагаемом выражения (8.2) в скобках стоит масса системы. Во втором слагаемом в скобках стоит величина Q_r — количество движения системы в ещё движении относительно центра масс. Она всегда равна нулю. Третье слагаемое представляет собой кинетическую энергию системы в её относительном движении T_r. Поэтому

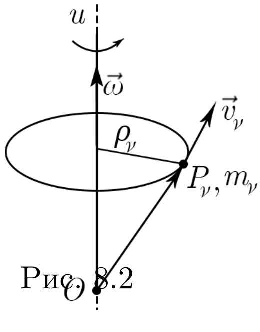
$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + T_r. \tag{8.3}$$

■

При решении задач, требующих нахождения кинетической энергии, следует обратить внимание на правильное применение теоремы Кёнига, поскольку опыт показывает, что студенты часто делают при этом ошибки.

Теперь проведём вычисление кинетической энергии для разных твёрдых тел.

1). Пусть твёрдое тело массой M движется мгновенно-поступательно. Это значит, что векторы скоростей всех точек тела в данный момент времени одинаковы. Обозначим скорость тела как $\vec{v}$. Тогда кинетическая энергия тела $T = \dfrac{1}{2}Mv^2$.



3.33 cm Рис. 8.2

2). Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси. Разобьём его на материальные точки P_ν с массами m_ν. Расстояние от точки P_ν до оси вращения равно ρ_ν, скорость $\vec{v}_\nu$ направлена по касательной к окружности движения (рис. 8.2). Модуль этой скорости $v_\nu = \omega\rho_\nu$. Вычислим кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\rho_\nu \omega\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J_z\omega^2, \tag{8.4}$$

где $J_z = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2$ — момент инерции тела относительно оси вращения. Таким образом, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, вычисляется по простой формуле:

$$T = \frac{1}{2}J_z\omega^2. \tag{8.5}$$

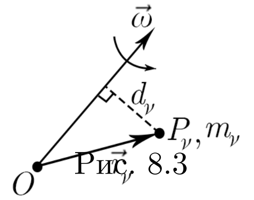


Рис. 8.3

3). Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной точки. Обозначим неподвижную точку как O. Мгновенная ось вращения проходит через точку O и направлена по вектору $\vec{\omega}$. Возьмём точку P_ν твёрдого тела. Расстояние от этой точки до мгновенной оси вращения обозначим как d_ν (рис. 8.3). Тогда $v_\nu = \omega d_\nu$, и вычисление кинетической энергии аналогично предыдущему примеру:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\omega d_\nu)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d_\nu^2\right)\omega^2. \tag{8.6}$$

Обозначим момент инерции тела вокруг мгновенной оси вращения как J_ω. Тогда $T = \dfrac{1}{2}J_\omega\omega^2$.

По сравнению с предыдущим примером вектор $\vec{\omega}$ перемещается и в пространстве, и в твёрдом теле, так что мгновенная ось вращения меняет ориентацию в пространстве. Значит, J_ω тоже может при этом меняться.

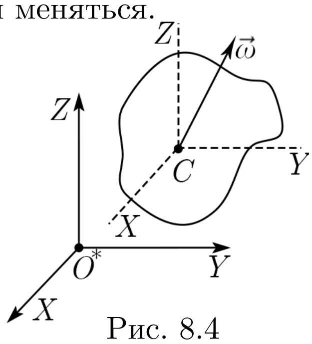


Рис. 8.4

4). Пусть твёрдое тело произвольным образом движется в пространстве. Введём абсолютную систему координат O^*XYZ. Введём также кёнигову систему координат $CXYZ$, где точка C является центром масс тела (рис. 8.4).

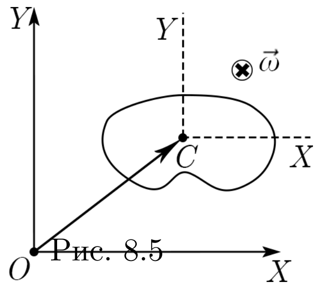
Пользуясь теоремой Кёнига, вычислим кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + T_r. \tag{8.7}$$

Относительное движение твёрдого тела представляет собой вращение вокруг центра масс. Вектор $\vec{\omega}$ не зависит от выбора полюса, так что построим его от точки C. Тогда

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_{C\omega}\omega^2.} \tag{8.8}$$

Здесь $J_{C\omega}$ — момент инерции твёрдого тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной вектору $\vec{\omega}$. В общем случае этот момент инерции меняется, поскольку меняется и ось вращения.



4.01 cm Рис. 8.5

5). Рассмотрим частный случай — плоское движение твёрдого тела. Введём в плоскости движения неподвижную система отсчёта OXY. Обозначим сечение твёрдого тела этой плоскостью и центр масс C. Проведём через точку C оси Кёнига CX и CY, параллельные осям OX и OY (рис. 8.5). Мгновенная ось вращения в кёниговой системе отсчёта может проходить только через центр масс C, так что $J_C = \text{const}$. Кинетическая энергия вычисляется так же, как и в предыдущем примере:

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2. \tag{8.9}$$

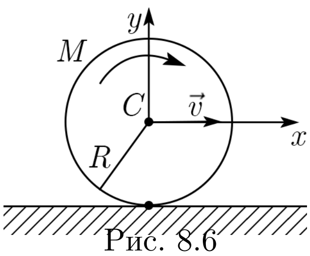


Рис. 8.6

6). Пусть однородный диск радиуса R и массы m катится по горизонтальной прямой без скольжения. Скорость центра диска C равна $\vec{v}$.

Для вычисления кинетической энергии применим теорему Кёнига. Введём систему координат с началом в точке C и движущуюся поступательно вместе с центром масс. Эта система координат $Cxyz$ и будет кёниговой системой координат. В этой системе координат движение диска является вращением вокруг оси, проходящей через точку C, с угловой скоростью $\omega = \frac{v}{[}h]$. Тогда

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{3}{4}Mv^2. \tag{8.10}$$

Решим эту задачу по-другому. Точка P, в которой в данный момент диск касается прямой, является мгновенным центром скоростей. Применим теорему Гюйгенса – Штейнера:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}Mv^2. \tag{8.11}$$

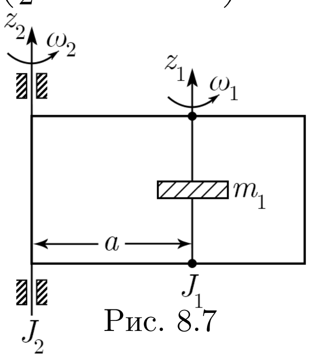


Рис. 8.7

7). Рассмотрим ещё один пример с прошлой лекции. Однородная прямоугольная рамка вращается вокруг оси z_2, проходящей через одну из её сторон, с угловой скоростью ω_2 (рис. 8.7). Момент инерции рамки вокруг этой оси известен и равен J_2.

В этой рамке на вертикальной проволоке закреплён диск, который может вращаться вокруг оси z_1, проходящей через центр диска и параллельной z_2. Проволока проходит через центр масс диска. Угловая скорость диска относительно рамки равна ω_1. Его момент инерции относительно оси его вращения равен J_1. Расстояние между осями z_2 и z_1 равно a, масса диска равна m_1. Требуется найти кинетическую энергию этой системы. Применим теорему Кёнига:

$$T = T_{\text{рамки}} + T_{\text{диска}} = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \left(\frac{1}{2}m_1(\omega_2 a)^2 + \frac{1}{2}J_1(\omega_1+\omega_1)^2\right). \tag{8.12}$$

Теорема 15 (Теорема об изменении кинетической энергии) Приращение кинетической энергии системы равно сумме элементарных работ внешних и внутренних сил системы:

$$dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}. \tag{8.13}$$

*

Док-во: Напишем основные уравнения движения:

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)}. \tag{8.14}$$

Кинетическая энергия $T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu^{\,2}$. Пусть за время dt произошло какое-то перемещение материальных точек. Тогда

$$\begin{aligned} dT &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu \cdot d\vec{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt}\cdot\vec{v}_\nu dt = \\ &= \sum_{\nu=1}^{N}\left(\vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)}\right)\cdot d\vec{[h]}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu^{(e)}\cdot d\vec{[h]}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu^{(i)}\cdot d\vec{[h]}_\nu. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Первое слагаемое в (8.15) — это элементарная работа внешних сил на элементарном перемещении $d\vec{[h]}_\nu$, а второе — работа внутренних сил на том же перемещении. Таким образом, $dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}$. ■

Важно, что приращения работы в теореме в общем случае не являются дифференциалами. Внутренние силы тоже могут совершать работу, поэтому они могут влиять на кинетическую энергию.

Теорема 8.2 сформулирована в дифференциальном виде. Если проинтегрировать формулу (10.31) по конечному интервалу, получим такое утверждение: *изменение кинетической энергии за некоторый интервал времени равно сумме работ внешних и внутренних сил за этот интервал времени*:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} d'A^{(e)} + \int\limits_{t_1}^{t_2} d'A^{(i)}. \tag{8.16}$$

Предположим, что все силы потенциальны, причём суммарный потенциал не зависит от времени. Тогда $d'A^{(e)} + d'A^{(i)} = -d\Pi$. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии выглядит так: $dT = -d\Pi$, или $d(T + \Pi) = 0$.

Определение 45: Полная механическая энергия *системы обозначается как E и равна сумме потенциальной и кинетической энергий системы: $E = T + \Pi$.* ♣

Таким образом, если все силы потенциальны, а потенциал не зависит от времени, то утверждение теоремы 8.2 сводится к тому, что *полная механическая энергия сохраняется*: $E = \text{const}$.

Оказывается, можно ослабить требование на потенциальность всех сил. Важно только потребовать, чтобы работу на действительных перемещениях совершали только потенциальные силы. Например, если система обладает только идеальными связями, и все они стационарны, то работа реакций на действительных перемещениях равна нулю, так что при потенциальности всех активных сил полная механическая энергия сохраняется.

Пусть твёрдое тело движется по горизонтальной плоскости. Если поверхность гладкая, то связь идеальная, и имеет место интеграл энергии. Если поверхность шероховатая, то связь неидеальна, следовательно, полная механическая энергия не сохраняется.

Таким образом, все основные теоремы динамики рассмотрены. Подчёркиваем, что они были сформулированы в инерциальных системах отсчёта и для систем, состоящих из материальных точек постоянной массы.

1. Основные теорем динамики в неинерциальных системах отсчёта

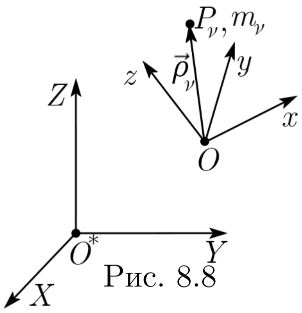


Рис. 8.8

Пусть в пространстве имеется неподвижная система отсчёта O^*XYZ. Введём систему координат $Oxyz$, произвольно движущуюся относительно неподвижной системы координат. Система материальных точек P_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, движется в этой неинерциальной системе отсчёта. Обозначим радиус-вектор точки P_ν относительно точки O как $\vec{\rho}_\nu$, её массу — как m_ν (рис. 8.8).

В абсолютной системе координат уравнение (8.14), разумеется, верно. Движение точки относительно системы отсчёта O^*XYZ можно рассматривать как сложное и разбить его на относительное и переносное. По теореме о сложении ускорений можно представить абсолютное ускорение точки P_ν как $\vec{w}_\nu = \vec{w}_{\nu_e} + \vec{w}_{\nu_r} + \vec{w}_{\nu_{\text{кор}}}$. Здесь последнее слагаемое — это кориолисово ускорение (обозначение $\vec{w}_c$ не используется во избежание путаницы с центром масс). Таким образом, основные уравнения динамики можно переписать так:

$$\vec{w}_{\nu_r} = \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)} + \vec{j}_{\nu_e} + \vec{j}_{\nu_{\text{кор}}}, \tag{8.17}$$

где $\vec{j}_{\nu_e} = -m_\nu \vec{w}_{\nu_e}$ — **переносная сила инерции**, $\vec{j}_{\nu_{\text{кор}}} = -2m_\nu \vec{\omega} \times \vec{v}_{\nu_r}$ — **кориолисова сила инерции**. Величины $\vec{j}_{\nu_e}$ и $\vec{j}_{\nu_{\text{кор}}}$ имеют размерность силы. Назовём их **силами инерции**. Когда будет изучаться общее уравнение, там силой инерции будет просто произведение массы на ускорение с обратным знаком. Здесь же силы инерции разделяются на переносную и кориолисову.

Таким образом, в неинерциальной системе второй закон Ньютона имеет такой же вид, что и в инерциальной, но к равнодействующей всех сил также добавлены силы инерции: переносная и кориолисова. Все основные теоремы динамики верны и в неинерциальной системе отсчёта, с поправкой на наличие сил инерции. Формально их нужно отнести к внешним силам. Приведём примеры, как будут выглядеть основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчёта.

Теорема 16 (Теорема об изменении количества движения) Введём в подвижной системе координат обозначение $\vec{Q}_r \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_{\nu_r}$. Тогда

$$\frac{d\vec{Q}_r}{dt} = \vec{[h]}^{(e)} + \vec{J}_e + \vec{J}_{\text{кор}}, \tag{8.18}$$

где $\vec{J}_e = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{w}_{\nu_e} = -M\vec{w}_{C_e}$, $\vec{w}_{C_e}$ — переносное ускорение центра масс системы; $\vec{J}_{\text{кор}} = -2M\vec{\omega} \times \vec{v}_{C_r}$, $\vec{v}_{C_r}$ — относительная скорость центра масс системы. $*$

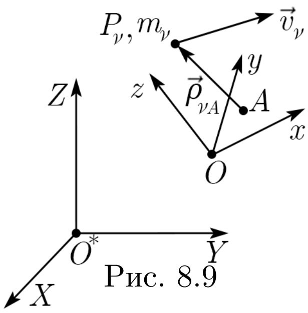


Рис. 8.9

Пусть имеются неподвижная система координат O^*XYZ и движущаяся относительно неё система координат $Oxyz$. Выберем произвольную точку A, неподвижную в системе координат $Oxyz$. Материальная система состоит из точек P_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Обозначим радиус-вектор точки P_ν относительно точки A как $\vec{\rho}_{\nu A}$, её массу — как m_ν, её скорость — как $\vec{v}_{\nu_r}$ (рис. 8.9).

Теорема 17 (Теорема об изменении кинетического момента) Введём в подвижной системе отсчёта обозначение $\vec{K}_{Ar} \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_{\nu A} \times m_\nu \vec{\nu}_r$. Тогда

$$\frac{d\vec{K}_{Ar}}{dt} = \vec{M}_A^{(e)} + \vec{M}_{A\ J_e} + \vec{M}_{A\ J_{\text{кор}}}, \tag{8.19}$$

где $\vec{M}_{A\ J_e}$ — главный момент переносных сил инерции относительно центра A, $\vec{M}_{A\ J_{\text{кор}}}$ — главный момент кориолисовых сил инерции относительно центра A. $*$

Теорема 18 (Теорема об изменении кинетической энергии) Введём в подвижной системе координат обозначение $T_r \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu_r}^2$. Тогда

$$dT_r = d'A^{(e)} + d'A^{(i)} + d'A_{J_e}, \tag{8.20}$$

где $d'A_{J_e}$ — элементарная работа переносных сил инерции. $*$

Работа кориолисовых сил равна нулю, потому что эти силы направлены перпендикулярно относительным перемещениям.

Теоремы 8.3, 8.4 и 8.5 сформулированы для произвольно движущейся инерциальной системы отсчёта. Теперь рассмотрим движение относительно центра масс.

2. Основные теоремы динамики в движении относительно центра масс

В данном разделе в качестве подвижной системы координат будет рассматриваться Кёнигова система координат. Она может быть инерциальной, а может и не быть, в зависимости от ускорения центра масс. В этом случае кориолисовы силы равны нулю, так как эта система не вращается.

1). Количество движения $\vec{Q}_r$. На 7 лекции выводилось, что количество движения относительно центра масс равно нулю, то есть $\vec{Q}_r = 0$. Из формулы (8.18) следует, что в случае кёниговой системы координат $\vec{[h]}^{(e)} + \vec{J}_e = 0$. Эту формулу можно использовать, например, чтобы найти реакции связей.

2). Кинетический момент $\vec{K}_{Cr}$. Теорема об изменении кинетического момента приобретает вид $\dfrac{d\vec{K}_{Cr}}{dt} = M_C^{(e)}$.

3). Кинетическая энергия T_r. Подсчитаем дифференциал кинетической энергии.

$$\begin{aligned} dT_r &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{\nu}_r \cdot d\vec{v}_{\nu_r} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\vec{v}_{\nu_r}}{dt} \cdot \vec{v}_{\nu_r} dt = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)} + \vec{j}_{\nu_e}\right) \cdot d\vec{\rho}_\nu = \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} \cdot d\vec{\rho}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(i)} \cdot d\vec{\rho}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{w}_{\nu_e} \cdot d\vec{\rho}_\nu. \end{aligned} \tag{8.21}$$

В случае кёниговой системы координат переносное ускорение — это ускорение центра масс: $\vec{w}_{\nu_e} = \vec{w}_C$. Тогда

$$dT_r = d'A^{(e)} + d'A^{(i)} - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d\vec{\rho}_\nu\right) \cdot \vec{w}_C. \tag{8.22}$$

Величина в скобках в равенстве (8.22) равна $M\, d\vec{\rho}_{Cr}$. Но по определению центра масс она равна нулю. Поэтому $dT_r = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}$. Значит, в движении относительно осей Кёнига теорема об изменении кинетической энергии выглядит точно так же, как и в инерциальной системе отсчёта.

Рассмотрим следующий пример. Материальная система движется в поле тяжести. Тогда можно сказать, что какова бы ни была эта система, её центр масс всегда движется по параболе. Вообще, центр масс движется так, будто он обладает массой всей системы, и к нему приложены все внешние силы. В этом примере внешняя сила одна, и она равна $M\vec{g}$. Если система является твёрдым телом, то относительный кинетический момент должен сохраняться, поскольку равнодействующая сил тяжести проходит через центр масс. В кёниговой системе координат точка приложения этой равнодействующей неподвижна, поэтому работы внешних сил нет. Внутренние силы в твёрдом теле работы не совершают, поэтому кинетическая энергия в относительном движении тоже сохраняется.

Теперь, после того как изучены основные теоремы динамики, нужно научиться решать задачи, применяя эти теоремы. Мало понимать законы природы, нужно ещё и использовать их для решения всевозможных задач.

Колоссальное влияние на становление классической механики, или «натуральной философии» по Ньютону, оказала **задача двух тел** — задача о движении двух тел под действием силы взаимного притяжения. Эта задача является примером задач на **движение в центральном поле сил**.

3. Движение материальной точки в центральном поле сил

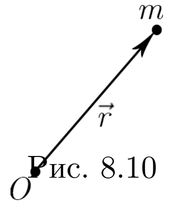


Рис. 8.10

Пусть имеется материальная точка массы m с радиус-вектором $\vec{[h]}$ относительно начала отсчёта O. Точка O также является центром силового поля: силы, действующие на материальную точку, проходят через этот неподвижный центр. Такие силы называются **центральными**. При этом сила $\vec{F} = F(r)\frac{\vec{[h]}}{[}h]$. Если $F(r) > 0$, то это сила отталкивания, а если $F(r) < 0$, то это сила притяжения. Получим, применяя вышеизложенную теорию, очень важные следствия. В полном объёме изучить задачу о движении в центральном поле сил не хватит лекционного времени, но на главные выводы следует обратить внимание. В учебнике Ландау – Лившица эта задача рассмотрена очень подробно, и в случае необходимости можно обратиться к нему.

Так как сила проходит через центр O, то её момент относительно этой точки равен нулю: $\vec{[h]} \times \vec{F} = \vec{0}$. Кинетический момент $\vec{K}_O = \vec{[h]} \times m\vec{v} = \text{const}$, так как $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = m\dfrac{d(\vec{[h]} \times \vec{v})}{dt} = \vec{[h]} \times \vec{F} = \vec{0}$. Таким образом, величина $\vec{c} \overset{\text{def}}{=} \vec{[h]} \times \vec{v}$ является интегралом движения. Она называется **векторной константой интеграла площадей**. Смысл этого названия будет понятен из дальнейшего.

Представим векторы $\vec{[h]}$, $\vec{v}$ и $\vec{c}$ в координатном виде: $\vec{[h]} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$.

Тогда $\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\dot{z} - \dot{y}z \\ z\dot{x} - \dot{x}z \\ x\dot{y} - \dot{y}x \end{pmatrix}$. Константы c_x, c_y и c_z представляют собой три интеграла движения. Если заданы начальные координаты и скорость точки, то эти константы известны.

Сделаем качественные выводы о движении. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то $\vec{[h]}$ и $\vec{v}$ коллинеарны, и движение является прямолинейным. В общем случае вектор $\vec{v}$ всегда ортогонален вектору $\vec{c}$, таким образом, движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной этому вектору. Итак, *в центральном поле сил траектория движения в общем случае является плоской кривой*. Плоскость, в которой происходит движение, определяется уравнением $c_x x + c_y y + c_z z = 0$.

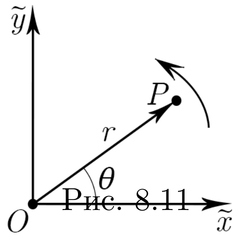


Рис. 8.11

Выясним геометрические свойства интеграла площадей. Введём в плоскости движения систему координат $O\tilde{x}\tilde{y}$. Ось $\tilde{z}$ коллинеарна вектору $\vec{c}$. Введём полярные координаты r, θ. В этих координатах $\tilde{x} = r\cos\theta$, $\tilde{y} = r\sin\theta$, $\tilde{z} = 0$, $\dot{\tilde{z}} = 0$. Найдём координаты вектора $\vec{c}$ в этой системе: $c_{\tilde{x}} = 0$, $c_{\tilde{y}} = 0$,

$$\begin{aligned} c_{\tilde{z}} = r\cos\theta\left(\dot{[h]}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right) - r\sin\theta\left(\dot{[h]}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta\right) = \\ = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\dot{\theta} = r^2\dot{\theta}, \end{aligned} \tag{8.23}$$

Выражение $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = c_{\tilde{z}}$ — это **полярная форма интеграла площадей**. Из него следует, что θ — монотонная функция времени. Если $c_{\tilde{z}} > 0$, то имеет место **прямое движение**, а если $c_{\tilde{z}} < 0$, то это обратное движение.

Введём обозначение $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$. Пусть движение прямое, тогда $c_{\tilde{z}} = c$. Если вектор $\vec{c}$ направлен к читателю на плоскости рисунка 8.11, то движение происходит против часовой стрелки. По истечению времени Δt угол θ получил приращение $\Delta\theta$. За

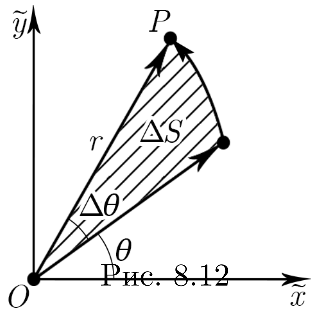


Рис. 8.12

это время радиус вектор точки P описал сектор площадью ΔS. В первом приближении $\Delta S = \dfrac{1}{2}r^2\Delta\theta$. Устремим Δt к нулю. Тогда

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{2}. \tag{8.24}$$

Величина $\dfrac{dS}{dt}$ называется **секторной скоростью**. Из (8.24) следует, что она постоянна. Получается, что *радиус-вектор точки при движении в центральном поле сил, проведённый из центра притяжения, за равные промежутки времени заметает равные площади.* Именно поэтому $\vec{c}$ называется интегралом площадей. Иногда в силу исторических причин закон сохранения кинетического момента также называется законом площадей.

Из вышеизложенного следует **второй закон Кеплера**: *радиус-вектором, проведённым от Солнца к планете, за равные промежутки времени описываются равные площади.* Этот закон был получен Кеплером из наблюдений за движением небесных светил, пользуясь вычислениями астронома Тихо Браге. Но из предыдущих выкладок ясно, что он справедлив для движения в любом центральном поле сил.