ЛЕКЦИЯ 9

ФОРМУЛЫ БИНЕ. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ. ГЕОМЕТРИЯ МАСС

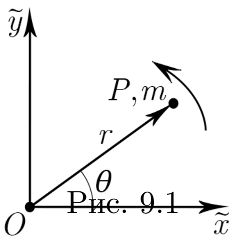

Рис. 9.1

Рассмотрим движение точки в центральном поле сил. Точка P массой m движется под действием силы вида $\vec{F} = F(R)\frac{\vec{[h]}}{[}h]$, то есть модуль силы зависит только от расстояния r. На прошлой лекции было установлено, что имеет место интеграл площадей $\vec{c} = \vec{[h]} \times \vec{v}$, что движение плоское. Если $c = 0$, то движение происходит по прямой. Если рассмотреть движение в полярных координатах в этой плоскости, то

$$r^2\dot{\theta} = c. \tag{9.1}$$

Один из важных выводов этой теории относится к движению планет. Планеты движутся вокруг Солнца так, что если провести радиус вектор от Солнца к планете, то за равные промежутки времени он будет заметать равные площади. Это утверждение носит название **второго закона Кеплера**. Была введена **секторная скорость** $\frac{dS}{dt} = \frac{c}{2}$.

1. Формулы Бине

Запишем скорость в полярных координатах:

$$v^2 = \dot{[h]}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \tag{9.2}$$

Введём обозначение $u = \frac{1}{[}h]$. Из (9.1) следует, что

$$\dot{\theta} = cu^2. \tag{9.3}$$

Найдём выражение через u для $\dot{[}h]$:

$$\dot{[}h] = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta}cu^2 = -c\,\frac{du}{d\theta}. \tag{9.4}$$

Теперь подставим формулы (9.3) и (9.4) в (9.2):

$$v^2 = c^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{u^2}c^2u^4, \tag{9.5}$$

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]. \tag{9.6}$$

Формула (9.6) — это **первая формула Бине**. Если известна константа c и зависимость r от θ, то она позволяет найти скорость точки и закон движения.

Теперь запишем работу сил в центральном поле на элементарном перемещении:

$$F(r)\,dr = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{m}{2}dv^2. \tag{9.7}$$

Введём производную по углу θ:

$$F(r)\frac{dr}{d\theta} = \frac{m}{2}\frac{dv^2}{d\theta}, \tag{9.8}$$

$$F(r)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{m}{2}\cdot c^2\frac{d}{d\theta}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right], \tag{9.9}$$

$$-F(r)\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta} = \frac{m}{2}c^2\left[2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u^2}{d\theta^2} + 2u\frac{du}{d\theta}\right]. \tag{9.10}$$

Если не рассматривать частный случай — движение по окружности, то $\frac{du}{d\theta} \neq 0$, и на этот множитель в (9.10) можно сократить.

$$F(r) = mc^2u^2\left(\frac{d^2u^2}{d\theta^2} + u\right). \tag{9.11}$$

Формула (9.11) — это **вторая формула Бине**. Если известна константа c и закон движения r от θ, то эта формула позволяет найти силу, под действием которой происходит это движение. Также она позволяет по известной силе найти траекторию движения. Пусть, например, точка движется в поле силы тяготения, $F(r) \sim \frac{1}{r^2}$. Тогда в формуле (9.11) множители $\frac{1}{r^2}$ сокращаются, и остаётся уравнение $\frac{d^2u^2}{d\theta^2} + u = C$, которое легко решается ввиду его линейности. Решение этого уравнения записывается в виде $u = A\sin\theta + B\cos\theta + C$, A, B и C — константы.

2. Задача двух тел

С общепринятой научной точки зрения это задача на двух тел, а двух точек. Но так как эта задача впервые была сформулирована чтобы найти движение планет, то первоначальное называние сохранилось.

Пусть, например, нужно изучить движение Земли вокруг Солнца. Масса всех остальных планет примерно в 2000 раз меньше массы Солнца, поэтому их влияние на движение Земли вокруг Солнца очень мало. Поэтому можно рассмотреть только две материальные точки, движущиеся в пространстве и притягивающиеся силой тяготения. Влияние остальных планет системы описывается в виде возмущений. Ими занимается специальная наука — теория возмущений.

Задача двух тел. Пусть в пространстве движутся две материальные точки. Они притягиваются друг к другу с силой всемирного тяготения. Заданы массы, начальные положения и начальные скорости точек. Каково движение точек?

Задача двух тел имеет полное решение, которое будет в кратком виде освещено на этой лекции. Если бы в каком-то воображаемом мире сила притяжения описывалась не законом всемирного тяготения, то тамошним физикам пришлось бы нелегко.

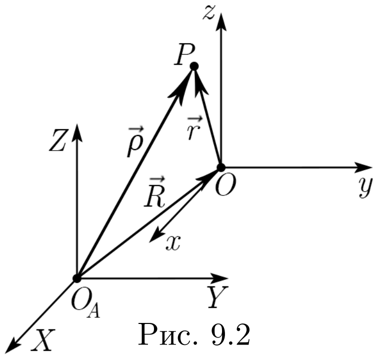

Рис. 9.2

Введём в пространстве неподвижную систему координат с началом в точке O_A и осями X, Y и Z. Точка O обладает массой M, её радиус-вектор относительно точки O_A — $\vec{[h]}$. Введём систему координат $Oxyz$, оси которой параллельны осям неподвижной системы отсчёта. Условно будем считать, что в точке O находится Солнце. Планета в начальный момент находится в какой-то точке P, её масса равна m. Радиус-вектор точки P относительно O_A обозначим как $\vec{\rho}$, а относительно O — как $\vec{[h]}$ (рис. 9.2).

Напишем дифференциальные уравнения движения точек.

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = -\gamma\dfrac{Mm}{r^3}\vec{[h]}, \\ M\dfrac{d^2\vec{[h]}}{dt^2} = \gamma\dfrac{Mm}{r^3}\vec{[h]}. \end{cases} \tag{9.12}$$

В первом уравнении можно сократить на m, а во втором — на M. Напишем уравнение для относительного движения точек. $\vec{[h]} = \vec{\rho} - \vec{[h]}$. Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{d^2\vec{[h]}}{dt^2} = -\gamma\frac{m}{r^3}\vec{[h]} - \gamma\frac{M}{r^3}\vec{[h]} = -\frac{\gamma(M+m)}{r^3}\vec{[h]}. \tag{9.13}$$

Введём обозначение $K \overset{\text{def}}{=} \gamma(M+m)$. Тогда уравнение (9.13) можно переписать так:

$$\ddot{\vec{[h]}} = -K\frac{\vec{[h]}}{r^3}. \tag{9.14}$$

Видно, что относительное движение точек — это движение в центральном поле сил. Значит, движение плоское, и $\vec{[h]} \times \vec{v} = \vec{c}$.

2.1. Интеграл энергии

Чтобы вычислить полную энергию, можно просто записать сумму потенциальной и кинетической энергий, но можно поступить и по-другому. Умножим уравнение (9.14) скалярно на $\dot{\vec{[h]}}$.

$$\ddot{\vec{[h]}} \cdot \dot{\vec{[h]}} = -K\frac{\vec{[h]} \cdot \dot{\vec{[h]}}}{r^3}, \tag{9.15}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{[h]}}\right)^2 = -K\frac{r\,\dot{[h]}}{r^3}, \tag{9.16}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2\right) = -\frac{K}{r^2}\dot{[h]} = K\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{[}h]\right), \tag{9.17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(v^2 - 2\frac{K}{[}h]\right) = 0. \tag{9.18}$$

Таким образом, $v^2 - 2\frac{K}{[}h] = h$, где h — интеграл энергии. h определяется начальными условиями. Из интеграла движения можно получить сведения о характере этого движения. Например, из интеграла площадей было получено, что движение является плоским, что секториальная скорость постоянна. Из интеграла энергии следует, что $v^2 = h + 2\frac{K}{[}h]$. Отсюда видно, что при удалении точек друг от друга скорость уменьшается, а при приближении — увеличивается. Если $h \geqslant 0$, то расстояние между точками может стать сколь угодно большим. Тогда на бесконечности $v_\infty = \sqrt{h}$. Если $h < 0$, то движение происходит в ограниченной части пространства: $r \leqslant \frac{2K}{|h|}$.

Получим ещё один интеграл движения, характерный для движения в центральном поле сил. Его наличие позволит проинтегрировать задачу, решить её до конца.

2.2. Интеграл Лапласа

Умножим (9.14) векторно на $\vec{c}$:

$$\vec{c} \times \ddot{\vec{[h]}} = -\frac{K}{r^3}\left(\vec{[h]} \times \dot{\vec{[h]}}\right) \times \vec{[h]}, \tag{9.19}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\vec{c} \times \vec{v}\right) &= \frac{K}{r^3}\vec{[h]} \times \left(\vec{[h]} \times \dot{\vec{[h]}}\right) = \frac{K}{r^3}\left[\vec{[h]}\left(\vec{[h]}, \dot{\vec{[h]}}\right) - \dot{\vec{[h]}}\left(\vec{[h]}, \vec{[h]}\right)\right] = \\ &= \frac{K}{r^3}\left[\vec{[h]}r\dot{[h]} - \dot{\vec{[h]}}r^2\right] = -\frac{K}{r^2}\left[r\dot{\vec{[h]}} - \dot{[h]}\vec{[h]}\right] = -K\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{[h]}}{[}h]\right), \end{aligned} \tag{9.20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{c} \times \vec{v} + K\frac{\vec{[h]}}{[}h]\right) = 0. \tag{9.21}$$

Таким образом,

$$\vec{c} \times \vec{v} + K\frac{\vec{[h]}}{[}h] = -\vec{f}, \quad \vec{f} = \text{const}. \tag{9.22}$$

Соотношение (9.22) называется **интегралом Лапласа**. Знак «минус» взят для удобства в дальнейших приложениях.

Уравнение (9.14) — уравнение шестого порядка, так как $\vec{[h]}$ имеет три координаты, а максимальный порядок производной в этом уравнении равен двум. Значит, его решение может зависеть максимум от шести произвольных постоянных. Интеграл площадей имеет три компоненты, интеграл энергии — одну и интеграл Лапласа — три. Значит, между этими семью константами есть какая-то связь. Заметим, что вектор $\vec{f}$ ортогонален вектору $\vec{c}$, так как вектора $\vec{c} \times \vec{v}$ и $\vec{[h]}$ ему ортогональны. То есть $\left(\vec{c}, \vec{f}\right) = 0$.

Докажем, что между интегралами движения существует связь $f^2 = K^2 + c^2 h$. Вычислим квадрат вектора Лапласа:

$$f^2 = c^2v^2 + 2\frac{K}{[}h]\left(\vec{c}\times\vec{v},\vec{[}h]\right) + K^2 = c^2v^2 - 2\frac{K}{[}h]\left(\vec{[}h]\times\vec{v},\vec{c}\right) + K^2 =$$
$$= c^2v^2 - 2\frac{K}{[}h]c^2 + K^2 = K^2 + c^2(v^2 - \frac{2K}{[}h]) = K^2 + c^2h. \tag{9.23}$$

2.3. Уравнение орбиты в задаче двух тел. Первый закон Кеплера

Наличие интеграла площадей и интеграла Лапласа позволяет получить уравнение орбиты. Если $\vec{c}=\vec{0}$, то орбита прямолинейна. Пусть $\vec{c}\neq\vec{0}$. Умножим обе части равенства (9.22) скалярно на $\vec{[}h]$:

$$\left((\vec{c}\times\vec{v}),\vec{[}h]\right) + K\frac{\left(\vec{[}h],\vec{[}h]\right)}{[}h] = -\left(\vec{f},\vec{[}h]\right). \tag{9.24}$$

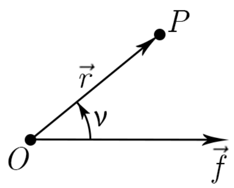

Рис. 9.3

Изобразим на рисунке 9.3 векторы $\vec{[}h]$ и $\vec{f}$. Обозначим угол между ними как ν. Этот угол называется **истинной аномалией**.

$$-\left(\left(\vec{[}h]\times\vec{v}\right),\vec{c}\right) + K\frac{r^2}{[}h] = -fr\cos\nu, \tag{9.25}$$

$$-c^2 + Kr = -fr\cos\nu, \tag{9.26}$$

$$r = \frac{c^2}{K + f\cos\nu}. \tag{9.27}$$

Таким образом, уравнение орбиты имеет вид

$$r = \frac{p}{1+e\cos\nu}, \tag{9.28}$$

где введены обозначения $p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C^2}{K}$, $e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{K}$. Уравнение (9.28) — это полярное уравнение эллипса, гиперболы или параболы. p — параметр орбиты, e — её эксцентриситет.

Итак, *движение в задаче двух тел происходит по коническим сечениям — по эллипсу, гиперболе или параболе*. Вид орбиты зависит от начальных данных. В частности, если $e=0$, то движение происходит по окружности. Таким образом, только что получен

первый закон Кеплера: *планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.* Когда $\nu = 0$, r минимально. Точка орбиты, в которой это значение достигается, называется **перицентром**. Точка орбиты, наиболее удалённая от центра притяжения, называется **апоцентром**. В случае движения планет вокруг Солнца эти точки называются **перигелием и афелием**.

Исторически сначала был открыт закон всемирного тяготения. Затем Ньютон решил обратную задачу: если сила $F = \gamma\dfrac{Mm}{r^2}$, каким будет движение планет вокруг Солнца? По этому поводу Лагранж говорил: «Ньютон — счастливчик, потому что мироздание можно объяснить лишь однажды».

Теперь займёмся классификацией орбит в зависимости от начальных условий. Пусть в начальный момент тело-спутник имеет радиус-вектор $[\vec{h}]_0$ от притягивающего центра и имеет скорость $\vec{v}$. Константа $h = v_0^2 - 2\dfrac{K}{r_0}$. Эксцентриситет $e = \sqrt{1 + h\dfrac{c^2}{K^2}}$ зависит от этой константы.

1. Если $e < 1$, то орбита имеет форму эллипса. Это происходит, когда $h < 0$, или $v_0 < \sqrt{\dfrac{2K}{r_0}}$.

2. Если $e = 0$, то орбита имеет форму параболы, $h = 0$, $v_0 = \sqrt{\dfrac{2K}{r_0}}$.

3. Если $e > 1$, то орбита имеет форму гиперболы, $h > 0$, $v_0 > \sqrt{\dfrac{2K}{r_0}}$.

Первая космическая скорость — это скорость тела на круговой орбите у поверхности Земли. Иными словами, это минимальная скорость, которую нужно придать телу, чтобы запустить его с поверхности Земли на геоцентрическую орбиту (при пренебрежении сопротивлением воздуха). Она равна примерно 7,9 км/с. Первую космическую скорость можно найти по формуле $v_{\mathrm{I}} = \sqrt{\dfrac{K}{R_0}}$, R_0 — радиус Земли.

Вторая космическая скорость — это параболическая скорость у поверхности Земли. Она в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической скорости и рассчитывается по формуле $v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2\dfrac{K}{R_0}}$. Она равна примерно 11,2 км/с.

Третья космическая скорость — это скорость космического аппарата у поверхности Земли, которая позволяет ему преодолеть притяжение Солнца и покинуть солнечную систему. Она зависит от положения Земли относительно Солнца. Наименьшая такая скорость равна приблизительно 16 км/с. При самых неблагоприятных условиях для запуска она равна примерно 72 км/с.

2.4. Третий закон Кеплера

Поскольку речь идёт о движении планеты вокруг Солнца, то орбита является эллиптической. Обозначим большую и малую полуось как a и b соответственно. В точке F, являющейся фокусом эллипса, находится Солнце; в точке P на орбите находится пла-

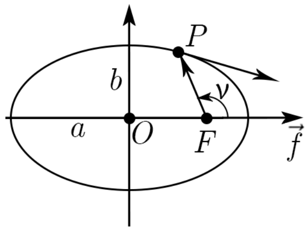

Рис. 9.4

нета. Вектор Лапласа направлен от Солнца к перигелию (рис. 9.4). Для параметров орбиты выполняются соотношения

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \qquad p = \frac{b^2}{a}. \tag{9.29}$$

Найдём период обращения. Это время, за которое точка P совершает один оборот. За это время радиус-вектор $\overrightarrow{FP}$ заметёт площадь, равную площади эллипса πab. Так как $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{c}{2}$, то $\pi ab = \dfrac{c}{2}T$. Тогда

$$T = \frac{2\pi ab}{c} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{pK}} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{\frac{b^2}{a}K}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{K}}. \tag{9.30}$$

Таким образом, период обращения вокруг Солнца зависит только от большой полуоси и пропорционален $a^{\frac{3}{2}}$. Также он зависит от K, а для разных звёзд и планет K имеет разные значения.

Возьмём две планеты с большими полуосями их орбит a_1 и a_2. Их периоды обращения $T_1 = \dfrac{2\pi a_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma(M+m_1)}}$, $T_2 = \dfrac{2\pi a_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma(M+m_2)}}$. Вычислим отношение квадратов T_1 и T_2:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m_2+M}{m_1+M} \cdot \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{9.31}$$

Массы планет по сравнению с массой Солнца малы, поэтому

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.} \tag{9.32}$$

Это **третий закон Кеплера**, и он гласит: *квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.*

3. Динамика твёрдого тела

Некоторые вопросы динамики твёрдого тела уже были рассмотрены. Например, уже получены дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг оси, дифференциальное уравнение плоского движения твёрдого тела. Приводились примеры вычисления кинетической энергии твёрдого тела. Был объяснён механический смысл понятия момента инерции.

4. Геометрия масс

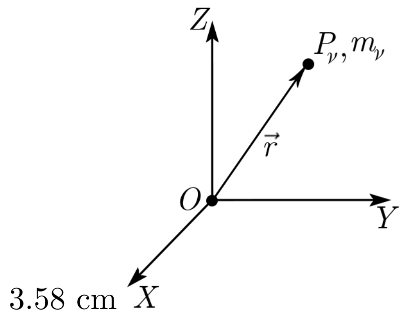

Рис. 9.5

Относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ движется твёрдое тело. Разобьём это тело на точки P_ν с массами m_ν (рис. 9.5). Обозначим координаты точки P_ν как x_ν, y_ν и z_ν. Введём величину J_x — момент инерции тела относительно осей неподвижной системы координат, или **осевые моменты**:

$$J_x = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right), \tag{9.33}$$

$$J_y = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(x_\nu^2 + z_\nu^2\right), \tag{9.34}$$

$$J_z = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(x_\nu^2 + y_\nu^2\right). \tag{9.35}$$

Если тело сплошное, то эти суммы переходят в интегралы.

Осевые моменты инерции не могут быть произвольными. Они должны удовлетворять неравенствам треугольника:

$$J_x + J_y \geqslant J_z, \qquad J_x + J_z \geqslant J_y, \qquad J_y + J_z \geqslant J_x. \tag{9.36}$$

Докажем первое из этих неравенств. Пользуясь определением осевых моментов, получаем

$$J_x + J_y = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(x_\nu^2 + y_\nu^2 + 2z_\nu^2\right) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(x_\nu^2 + y_\nu^2\right) + 2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu^2. \tag{9.37}$$

Первое слагаемое в (9.37) — это J_z, а вторая сумма неотрицательна. Следовательно, первое из неравенств треугольника для осевых моментов доказано. Аналогично доказываются и другие неравенства. Знак равенства в одном из неравенств (9.36) будет тогда, когда по одной из осей координаты всех частиц равен нулю, то есть, когда тело плоское.

Приведём пример. Имеется тонкий однородный диск с массой m и радиусом R. Все точки этого диска лежат в плоскости Oxy (рис. 9.6). Необходимо найти осевые моменты инерции. Относительно оси z момент инерции равен $\frac{1}{2}mR^2$. Поскольку диск лежит в

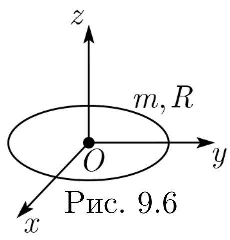

Рис. 9.6

плоскости $z=0$, то $J_x+J_y=J_z$. В силу симметрии диска $J_x=J_y$. Значит, $2J_x=2J_y=J_z=\dfrac{1}{2}mR^2$. Поэтому ответ к задаче такой: $J_x=J_y=\dfrac{1}{4}mR^2$.

Одних осевых моментов инерции недостаточно, чтобы описать геометрию масс. Введём ещё три величины, необходимые для её описания — **центробежные моменты инерции**:

$$J_{xy}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu x_\nu y_\nu,\qquad J_{xz}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu x_\nu z_\nu,\qquad J_{yz}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu y_\nu z_\nu. \tag{9.38}$$

Центробежные моменты инерции симметричны относительно своих индексов: $J_{xy}=J_{yx}$, и так далее. В отличие от осевых моментов, они могут быть и отрицательными. Эти моменты тоже не могут быть произвольными. Они должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$J_{xy}\leqslant\frac{1}{2}J_z,\qquad J_{xz}\leqslant\frac{1}{2}J_y,\qquad J_{yz}\leqslant\frac{1}{2}J_x. \tag{9.39}$$

Эти неравенства легко доказываются. Например, первое из них следует из очевидного неравенства $\sum\limits_{\nu=1}^{N}m_\nu(x_\nu-y_\nu)^2\geqslant 0$.

Определение 46: Главной осью инерции *называется ось, для которой оба центробежных момента инерции, содержащие индекс этой оси, равняются нулю.* ♣

Например, если $J_{xz}=J_{yz}=0$, то ось z — главная ось инерции.

Определение 47: Главной центральной осью инерции *называется главная ось инерции, проходящая через центр масс.* ♣

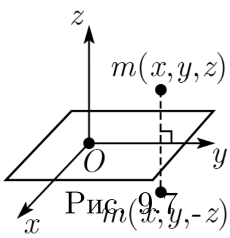

Рис. 9.7

Иногда можно легко сказать, какие оси в системе являются главными, исходя из структуры системы.

1). Пусть, например, у материальной системы есть симметрия относительно плоскости $z=0$ то есть если в системе есть точка с массой m и координатами x, y и z, то в ней обязательно есть точка массой m и координатами x, y и $-z$ (рис. 9.7). Тогда любая ось, параллельная оси z, будет главной осью инерции.

2). Пусть у материальной системы есть ось симметрии. Выберем систему координат, в которой эта ось будет осью z. Тогда симметрия относительно этой оси означает, что если в системе есть точка с массой m и координатами x, y и z, то в ней обязательно есть точка с массой m и координатами $-x$, $-y$ и z (рис. 9.8). Тогда центр масс лежит на оси z, и эта ось является главной центральной осью инерции.

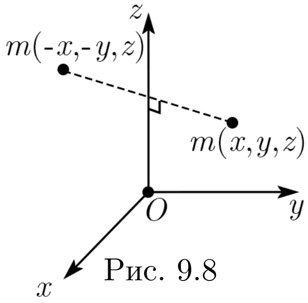

Рис. 9.8

Следующая лекция начнётся с вычисления момента инерции относительно произвольной оси с использованием только что введённых понятий.