ЛЕКЦИЯ 10

ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ ВРАЩЕНИИ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА. СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА

1. Геометрия масс (продолжение)

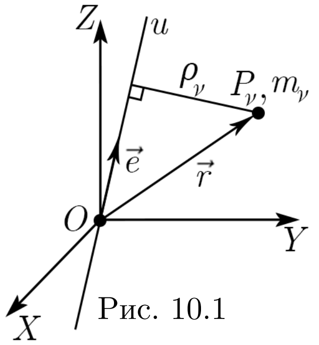

Рис. 10.1

Выберем в пространстве неподвижную систему координат $OXYZ$. В ней движется материальная система, состоящая из материальных точек P_ν с массами m_ν (рис. 10.1). Точки имеют координаты x_ν, y_ν и z_ν.

Рассмотрим задачу нахождения момента инерции системы относительно произвольной оси, проходящей через начало координат. Проведём такую ось и обозначим её как u. Введём единичный вектор, направленный по оси u — $\vec{e} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Величины α, β и γ —

произвольные, с учётом того, что $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Они называются **направляющими косинусами** оси u.

Обозначим расстояние от точки P_ν до этой оси как ρ_ν. Момент инерции относительно оси u:

$$J_u=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2. \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned}\rho_\nu^2 &= [\vec{h}]_\nu^2-\left([\vec{h}]_\nu,\vec{e}\right)^2 = x_\nu^2+y_\nu^2+z_\nu^2-(x_\nu\alpha+y_\nu\beta+z_\nu\gamma)^2=\\ &=x_\nu^2(1-\alpha^2)+y_\nu^2(1-\beta^2)+z_\nu^2(1-\gamma^2)-2x_\nu y_\nu\alpha\beta-2x_\nu z_\nu\alpha\gamma-2y_\nu z_\nu\beta\gamma=\\ &=x_\nu^2\left(\beta^2+\gamma^2\right)+y_\nu^2\left(\alpha^2+\gamma^2\right)+z_\nu^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)-2x_\nu y_\nu\alpha\beta-2x_\nu z_\nu\alpha\gamma-2y_\nu z_\nu\beta\gamma=\\ &=\left(y_\nu^2+z_\nu^2\right)\alpha^2+\left(x_\nu^2+z_\nu^2\right)\beta^2+\left(x_\nu^2+y_\nu^2\right)\gamma^2-2x_\nu y_\nu\alpha\beta-2x_\nu z_\nu\alpha\gamma-2y_\nu z_\nu\beta\gamma.\end{aligned} \tag{10.2}$$

Подставим (10.2) в (10.1) и применим понятия осевых и центробежных моментов инерции, введённые на прошлой лекции:

$$J_u=J_x\alpha^2+J_y\beta^2+J_z\gamma^2-2J_{xy}\alpha\beta-2J_{xz}\alpha\gamma-2J_{yz}\beta\gamma. \tag{10.3}$$

По формуле (10.3) можно вычислить момент инерции относительно любой оси, проходящей через точку O. Для этого нужно знать только направляющие косинусы оси, три осевых и три центробежных момента инерции.

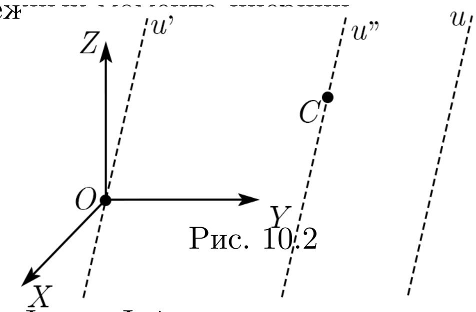

Рис. 10.2

Матрица $J=\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz}\\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z\end{pmatrix}$ называется **матрицей тензора инерции** для точки O или **матрицей инерции**. С её помощью формулу (10.3) можно кратко записать как $J_u=(\vec{e},J\vec{e})$. Шесть величин, задающих матрицу инерции, подчиняются определённым правилам при повороте системы координат. Эти правила соответствуют правилам преобразования тензоров второго ранга.

Пусть требуется узнать момент инерции системы относительно оси u, не проходящей через точку O. Обозначим центр масс системы как C. Проведём ось, параллельную u, через точку O и назовём её u', а также ось u'', параллельную u и проходящую через точку C (рис. 10.2). Вычислим момент инерции $J_{u'}$ по формуле (10.3). По теореме Гюйгенса–Штейнера можно рассчитать момент инерции $J_{u''}$, а затем можно найти и момент инерции J_u.

2. Эллипсоид инерции

Пусть имеется материальная система, движущаяся в какой-то системе координат. Возьмём произвольную ось u, проходящую через точку O. Известны матрица инерции J,

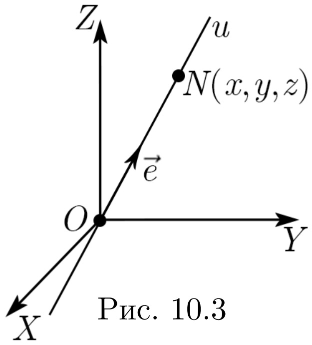

Рис. 10.3

направляющий вектор оси u $\vec{e} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Вычислим по формуле (10.3) момент инерции относительно оси u и отложим от точки O на ней отрезок длиной $ON = \dfrac{1}{\sqrt{J_u}}$ (рис. 10.3). Выберем другую ось и совершим с ней те же самые действия. Переберём все возможные направления осей. Требуется найти геометрическое место всех точек N.

Пусть точка N на прямой u имеет координаты $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда

$$x = ON\alpha, \qquad y = ON\beta, \qquad z = ON\gamma, \tag{10.4}$$

$$\alpha = \sqrt{J_u}x, \qquad \beta = \sqrt{J_u}y, \qquad \gamma = \sqrt{J_u}z. \tag{10.5}$$

Подставим эти значения α, β и γ в формулу (10.3). В каждом слагаемом сократим на сомножитель J_u:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1. \tag{10.6}$$

Уравнение (10.6) задаёт геометрическое место всех точек N. Это уравнение второго порядка, и поверхность, которую оно определяет, ограничена, так как осевые моменты инерции положительны. Значит, это эллипсоид. Поверхность, задаваемая уравнением (10.6), называется **эллипсоидом инерции** системы для точки O. Для разных точек будут различные эллипсоиды. Чем больше значения моментов инерции, тем ближе точки эллипсоида будут к точке O, и, следовательно, тем он меньше.

Есть один исключительный случай: если все точки материальной системы находятся на оси u, то момент инерции относительно этой оси равен нулю. Тогда эллипсоид инерции вырождается в круговой цилиндр с осью u и простирается до бесконечности.

Систему координат можно повернуть так, чтобы привести уравнение эллипсоида к каноническому виду. Для этого нужно решить уравнение

$$\det \|J - \lambda E\| = 0. \tag{10.7}$$

Это уравнение третьего порядка относительно λ. Так как матрица J симметрическая и вещественная, то все собственные значения вещественны и положительны: $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = B$, $\lambda_3 = C$. Обозначим единичные собственные векторы, соответствующие этим значениям, как $\overrightarrow{OX_*}$, $\overrightarrow{OY_*}$ и $\overrightarrow{OZ_*}$. Осуществим переход от системы координат $OXYZ$ к $OX_*Y_*Z_*$. В новой системе координат уравнение эллипсоида имеет канонический вид:

$$A{X_*}^2 + B{Y_*}^2 + CZ_*^2 = 1. \tag{10.8}$$

Все центробежные моменты инерции равняются нулю: $J_{X_*Y_*} = J_{X_*Z_*} = J_{Y_*Z_*} = 0$. Введём обозначения $A = \dfrac{1}{a^2}$, $B = \dfrac{1}{b^2}$, $C = \dfrac{1}{c^2}$. Тогда поверхность эллипсоида инерции описывается уравнением

$$\frac{X_*^2}{a^2} + \frac{Y_*^2}{b^2} + \frac{Z_*^2}{c^2} = 1. \tag{10.9}$$

Все три оси новой системы координат являются главными осями инерции, так как все центробежные моменты инерции равны нулю. Матрица инерции имеет диагональный вид: $J = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Если точка O является центром масс, то выбранные оси OX_*, OY_* и OZ_* называются **главными центральными осями инерции**. Разным корням характеристического уравнения (10.7) отвечают ортогональным собственным векторам. Значит, если все собственные значения различны, то существует единственный набор трёх главных центральных осей инерции, ортогональных друг другу. В этом случае эллипсоид называют **трёхосным** (не самое удачное название с точки зрения лектора).

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, или $A = B \neq C$, то две оси OX_* и OY_* ортогональны третьей оси OZ_*. Любая ось, ортогональная OZ_* и проходящая через точку O, является главной осью инерции. Следовательно, в этом случае существует бесчисленное множество главных осей инерции. При этом плоскость, перпендикулярная оси OZ_*, называется **экваториальной**. Тело, обладающее таким эллипсоидом инерции, называется **динамически симметричным**. В случае динамической симметрии момент инерции относительно оси OZ_* называется **осевым** или **аксиальным** (тоже не вполне удачное название).

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Тогда $A = B = C$, и любая ось, проходящая через точку O, будет главной. Точка O в этом случае называется **шаровой точкой**. При этом тело не обязательно должно иметь форму шара. Например, можно так подобрать размеры однородного конуса, что его вершина будет шаровой точкой.

3. Кинетический момент твёрдого тела, движущегося вокруг неподвижной точки

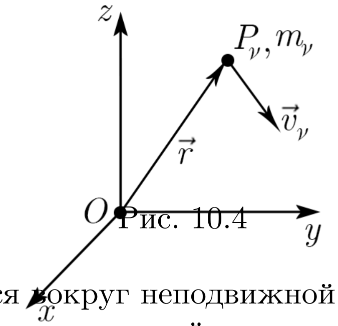

Рис. 10.4

Пусть твёрдое тело движется вокруг неподвижной точки. Обозначим неподвижную точку как O. Требуется узнать кинетический момент твёрдого тела в данный момент.

Введём неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в неподвижной точке. Разобьём тело на материальные точки P_ν с массами m_ν и радиус-векторами $\vec{\rho}_\nu$. Скорость точки P_ν равна $\vec{v}_\nu$. Введём обозначения для координат вектора угловой скорости и радиус-вектора: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, $\vec{\rho}_\nu = \begin{pmatrix} x_\nu \\ y_\nu \\ z_\nu \end{pmatrix}$. Необходимо вычислить кинетический момент

$\vec{K}_O = \begin{pmatrix} K_{Ox} \\ K_{Oy} \\ K_{Oz} \end{pmatrix}$. По определению кинетического момента $\vec{K}_O = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu$. По формуле Эйлера $\vec{v}_\nu = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu$. Поэтому

$$\begin{aligned} \vec{K}_O = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{\rho}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[\vec{\omega}\,(\vec{\rho}_\nu, \vec{\rho}_\nu) - \vec{\rho}_\nu\,(\vec{\rho}_\nu, \vec{\omega})\right] = \\ = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[\vec{\omega}(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - \vec{\rho}_\nu (x_\nu p + y_\nu q + z_\nu r)\right]. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Выпишем выражение для отдельной компоненты:

$$\begin{aligned} K_{Ox} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[p(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - x_\nu (x_\nu p + y_\nu q + z_\nu r)\right] = \\ = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2) p - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu q - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu r, \end{aligned} \tag{10.11}$$

$$K_{Ox} = J_x p - J_{xy} q - J_{xz} r. \tag{10.12}$$

Остальные компоненты вычисляются аналогично:

$$K_{Oy} = -J_{xy} p + J_y q - J_{yz} r, \tag{10.13}$$

$$K_{Ox} = -J_{xz} p - J_{yz} q + J_z r. \tag{10.14}$$

Или, если записать эти равенства в матричной форме, то $\vec{K}_O = J\vec{\omega}$.

Рассмотрим два важных частных случая.

1). Пусть оси x, y и z — главные оси инерции для точки O. Тогда

$$J_x = A, \quad J_y = B, \quad J_z = C, \quad J_{xy} = 0, \quad J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0, \tag{10.15}$$

$$K_{Ox} = Ap, \qquad K_{Oy} = Bq, \qquad K_{Oz} = Cr. \tag{10.16}$$

Значит, в системе координат, где оси являются главными осями инерции тела, компоненты кинетического момента получаются умножением соответствующих осевых моментов инерции и компонент вектора $\vec{\omega}$.

2). Пусть ось z — ось вращения тела. Тогда $p = q = 0$.

$$K_{Ox} = -J_{xz} r, \qquad K_{Oy} = -J_{yz} r, \qquad K_{Ox} = J_z r. \tag{10.17}$$

В общем случае все три компоненты кинетического момента не равны нулю. Это значит, что при вращении вокруг оси кинетический момент не обязательно направлен вдоль этой оси. Он направлен вдоль неё тогда и только тогда, когда эта ось является главной осью инерции тела.

4. Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

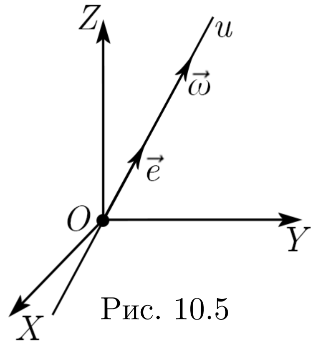

Рис. 10.5

Пусть твёрдое тело движется вокруг неподвижной точки. Обозначим неподвижную точку как O. Как и в предыдущем разделе, введём неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в неподвижной точке. Существует мгновенная ось вращения u, по которой направлен вектор $\vec{\omega}$. Введём единичный вектор $\vec{e} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, направленный по $\vec{\omega}$. Требуется узнать кинетическую энергию твёрдого тела в данный момент.

Как известно, $T = \dfrac{1}{2} J_\omega \omega^2$, где J_ω — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения J_u. Подставим выражение для J_u:

$$T = \frac{1}{2}\left(J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{xz}\alpha\gamma - 2J_{yz}\beta\gamma\right)\omega^2. \qquad (10.18)$$

Запишем компоненты вектора $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \omega\vec{e} = \omega\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \qquad (10.19)$$

$$p = \omega\alpha, \qquad q = \omega\beta, \qquad r = \omega\gamma, \qquad (10.20)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(J_x p^2 + J_y q^2 + J_z r^2 - J_{xy}pq - J_{xz}pr - J_{yz}qr\right). \qquad (10.21)$$

Формула (10.21) задаёт искомую кинетическую энергию тела. Для того чтобы её вычислить, необходимо знать матрицу инерции и компоненты вектора угловой скорости. В матричном виде эту формулу можно записать так:

$$T = \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}, \vec{K}_O\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}, J\vec{\omega}\right). \qquad (10.22)$$

Заметим, что из этой формулы следует, что угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{K}_O$ всегда острый. В противном случае кинетическая энергия тела была бы отрицательна или равна нулю.

Рассмотрим частный случай — пусть оси x, y и z — главные оси инерции. Тогда

$$J_x = A, \quad J_y = B, \quad J_z = C, \quad J_{xy} = 0, \quad J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0, \qquad (10.23)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right). \tag{10.24}$$

Чтобы вычислить кинетическую энергию тела в случае произвольного движения в пространстве, нужно применить теорему Кёнига. Проведём через центр масс тела C главные оси инерции x, y и z. Пусть кёнигова система координат такова, что в данный момент её оси совпадают с осями x, y и z. Тогда $T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)$.

5. Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера

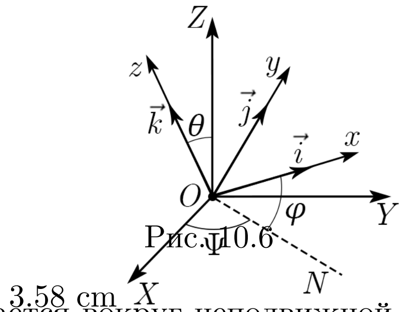

Рис. 10.6

3.58 cm

Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной точки O. Построим неподвижную систему координат $OXYZ$. Введём подвижную систему координат $Oxyz$, жёстко связанную с телом и вращающуюся вместе с ним. Для простоты вычислений направим эти оси по главным осям инерции тела для точки O. Тогда матрица инерции имеет хорошо знакомый диагональный вид $J = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$.

Введём углы Эйлера. Построим плоскость Oxy и прямую пересечения этой плоскости с плоскостью OXY, известную как линия узлов ON.

1. Угол собственного вращения ϕ — угол между Ox и ON;
2. Угол прецессии Ψ — угол между OX и ON;
3. Угол нутации θ — угол между OZ и Oz.

На прошлых лекциях уже выводились кинематические уравнения Эйлера. Теперь выведем **динамические уравнения Эйлера**, связывающие динамические величины твёрдого тела через углы Эйлера.

Вектор $\vec{\omega}$ имеет компоненты $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$. Пусть $\vec{M}_O^{(e)}$ — момент внешних сил относительно точки O. Распишем его покоординатно: $\vec{M}_O^{(e)} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$. Так как оси подвижной системы отсчёта — главные оси инерции, то $\vec{K}_O = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}$. Чтобы получить дифференциальные уравнения движения, используем теорему об изменении кинетического момента. Она выражается формулой $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(e)}$. Перейдём от абсолютных производных к относительным:

$$\frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{K}_O + \vec{M}_O^{(e)}. \tag{10.25}$$

Введём орты $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, направленные по осям подвижной системы координат. С их учётом

$$\vec{\omega} \times \vec{K}_O = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{pmatrix}. \tag{10.26}$$

Подставим это в (10.25):

$$\begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = M_x, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)rp = M_y, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = M_z. \end{cases} \tag{10.27}$$

Уравнения (12.3) и называются **динамическими уравнениями Эйлера**. Они должны рассматриваться вместе с кинематическими уравнениями:

$$\begin{cases} p = \dot{\Psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi, \\ q = \dot{\Psi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi, \\ r = \dot{\Psi}\cos\theta + \dot{\phi}. \end{cases} \tag{10.28}$$

Уравнения (12.4) — кинематические уравнения Эйлера, которые были выведены на 3 лекции. Получаем систему из 6 уравнений, каждое из них — первого порядка. Неизвестных величин в них тоже 6, значит, эта система может быть разрешима. За обобщённые координаты можно принять углы Эйлера.

Задача должна быть поставлена следующим образом. Задана матрица инерции, задан или может быть вычислен момент внешних сил. Заданы начальные значения углов Эйлера и их производных. Найти последующее движение твёрдого тела.

Систему уравнений (12.3) и (12.4) должны рассматриваться совместно, поскольку момент внешних сил может зависеть от углов Эйлера. Однако есть случаи, когда эти уравнения можно разделить.

6. Случай Эйлера

Рассмотрим так называемый **случай Эйлера**: $\vec{M}_O^{(e)} = 0$. Например, такой случай имеет место, если твёрдое тело подвешено в магнитном поле и может свободно вращаться в пространстве. Тогда дифференциальные уравнения принимают вид

$$\begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)rp = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = 0. \end{cases} \tag{10.29}$$

Это три дифференциальных уравнения первого порядка, содержащие три неизвестных. Если решить их, можно найти p, q, r как функции времени. Подставим их в (12.4), и кинематические уравнения тоже станут системой уравнений третьего порядка с тремя неизвестными. Если решить эту систему уравнений, то вся задача будет решена.

В случае Эйлера вектор $\vec{K}_O$ постоянен. При постановке задачи о нахождении движения в случае Эйлера кинетический момент можно вычислить сразу из начальных условий. Если постоянен вектор, то постоянен и его модуль, то есть

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_O^2 = \text{const}. \tag{10.30}$$

Выражение (10.30) является интегралом системы уравнений (10.29).

Далее, по теореме об изменении кинетической энергии приращение этой величины равно работе всех внешних сил.

$$dT = \vec{[}h] \cdot \vec{v}\,dt + \vec{M}_O^{(e)} \cdot \omega\,dt. \tag{10.31}$$

Первое слагаемое в (10.31) равно нулю, потому что точка O неподвижна, а второе — потому что по условию задачи момент внешних сил равен нулю. Значит, кинетическая энергия твёрдого тела тоже сохраняется.

$$\frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) = T = \text{const}. \tag{10.32}$$

Выражение (10.32) определяет второй интеграл движения.

Используя формулы (10.30) и (10.32), выразим q и r как функции p. Подставим функции $q(p)$ и $r(p)$ в первое уравнение из (10.29). Тогда в нём будет только одна неизвестная — p. Аналогично поступим с другими уравнениями из (10.29). Получается, что переменные разделяются. Получающиеся функции довольно сложны; результат интегрирования уравнений (10.29) сводится к эллиптическим интегралам. Важно то, что он берётся, следовательно, задача о движении в случае Эйлера решается до конца.

Интеграл кинетической энергии можно было получить непосредственно из дифференциальных уравнений. Домножим первое уравнение в (10.29) на p, второе — на q, а третье — на r. Сложим все получившиеся уравнения. Получится равенство $A\dfrac{dp}{dt}p + B\dfrac{dq}{dt}q + C\dfrac{dr}{dt}r = dT = 0$. Интеграл квадрата кинетического момента можно получить аналогично, тогда нужно домножить уравнения (10.29) на Ap, Bq и Cr соответственно.

7. Перманентные (стационарные) вращения твёрдого тела в случае Эйлера

Определение 48: *Перманентное (стационарное) вращение твёрдого тела — это вращение с постоянным вектором угловой скорости $\vec{\omega}$.* ♣

Если $\vec{\omega}$ постоянен, то это так в любой системе отсчёта, поэтому он постоянен как в абсолютной системе координат, так и в самом теле. Значит, p, q и r постоянны.

Найдём условия, при которых такое возможно. Подставим в (10.29) постоянные значения p, q и r:

$$\begin{cases} (C-B)\,q\,r = 0, \\ (A-C)\,r\,p = 0, \\ (B-A)\,p\,q = 0. \end{cases} \tag{10.33}$$

Утверждение 4 Перманентные вращения являются вращениями вокруг главной оси инерции с произвольной и постоянной по величине угловой скоростью. $*$

Док-во: 1). Пусть все осевые моменты разные, то есть эллипсоид инерции является трёхосным. Значит, $p\,r = p\,q = q\,r = 0$. Это уравнение имеет такие решения: две из величин p, q и r равны нулю, а третья произвольна. Также есть тривиальное решение $p = q = r = 0$, но оно интереса не представляет. Итак, в случае трёхосного эллипсоида инерции вращение происходит вокруг одной из главных осей инерции.

2). Пусть тело динамически симметрично: $A = B \neq C$. Тогда уравнение $(B-A)\,p\,q = 0$ тождественно верно. Должны выполняться соотношения $q\,r = 0$, $r\,p = 0$. Эти соотношения допускают следующие решения: либо $r = 0$, а p и q произвольные, либо $p = 0$, $q = 0$, а r произвольно. В первом случае вектор $\vec{\omega}$ лежит в экваториальной плоскости, значит, этот случай отвечает вращению вокруг одной из главных осей инерции, лежащих в этой плоскости. Второй отвечает вращению вокруг оси z.

3). Пусть точка O — шаровая, и $A = B = C$. Тогда любая ось, проходящая через точку O, является главной, и (10.33) выполняется при любых значениях p, q и r. ■

Из вышесказанного следует, что система уравнений (10.33) интегрируется. Решения этой системы — это тривиальное решение $p = q = r = 0$, при котором тело покоится, и перманентные вращения — вращения вокруг одной из главных осей инерции с постоянной угловой скоростью.