ЛЕКЦИЯ 11

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Выпишем динамические и кинематические уравнения Эйлера. Пусть p, q, r — проекции угловой скорости тела на главные оси инерции, A, B, C — главные моменты инерции относительно этих осей, M_x, M_y, M_z — проекции момента внешних сил относительно точки O на эти оси. Тогда динамические уравнения Эйлеры записываются следующим образом:

$$\begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = M_x, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)pr = M_y, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = M_z. \end{cases} \tag{11.1}$$

Кинематические уравнения Эйлера (ψ, θ, ϕ — углы Эйлера):

$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\theta \sin\phi + \dot\theta \cos\phi, \\ q = \dot\psi \sin\theta \cos\phi - \dot\theta \sin\phi, \\ r = \dot\psi \cos\theta + \dot\phi. \end{cases} \tag{11.2}$$

1. Случай Эйлера

Движение твёрдого тела с неподвижной точкой в отсутствии момента внешних сил относительно неподвижной точки ($\vec{M}_O^{(e)} = 0$) составляет **случай Эйлера**. Динамические уравнения Эйлера (11.1) в этом случае принимают вид:

$$\begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)pr = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = 0. \end{cases} \tag{11.3}$$

1.1. Интегралы движения в случае Эйлера

Из $\vec{M}_O^{(e)} = 0$ следует, что кинетический момент имеет неизменный модуль и неизменное направление в неподвижной системе координат.

$$\vec{K}_O = \mathrm{const} \tag{11.4}$$

Отметим явно, что сохраняется абсолютное значение вектора кинетического момента:

$$K_O = (Ap)^2 + (Bq)^2 + (Cr)^2 = \mathrm{const}. \tag{11.5}$$

Запишем выражение для работы сил, приложенных к твёрдому телу, выбрав в качестве полюса неподвижную точку O:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{[h]}^{(e)} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O^{(e)} \cdot \vec{\omega} = 0.$$

Приходим к тому, что кинетическая энергия твёрдого тела $T = 1/2\,\vec{\omega} \cdot \hat{J}\vec{\omega}$ в случае Эйлера остаётся постоянна во время движения:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \mathrm{const}. \tag{11.6}$$

Интегралы движения (11.5) и (11.6) можно получить из уравнений (11.3). Если умножить строки на $A^2\dot{p}$, $B^2\dot{q}$, $C^2\dot{[h]}$ и сложить приходим к тому, что производная от левой части равенства (11.5) равна нулю. Аналогично, умножая строки на $A\dot{p}$, $B\dot{q}$, $C\dot{[h]}$ и складывая, получаем интеграл энергии.

1.2. Стационарные вращения в случае Эйлера

Вращение называется **стационарным**, если вектор угловой скорости относительно тела $\vec{\omega}$ постоянен. Тогда постоянен и абсолютный вектор угловой скорости $\vec{\omega}$:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{\omega}] + \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0. \tag{11.7}$$

Так как p, q, r постоянны, то из (11.3) следует:

$$\begin{cases} (C-B)qr = 0, \\ (A-C)pr = 0, \\ (B-A)pq = 0. \end{cases} \tag{11.8}$$

Теорема 19 Стационарные вращения в случае Эйлера являются вращениями вокруг главных осей инерции с произвольной величиной угловой скорости. *

Док-во: Возможны три случая:

1) $A \neq B \neq C$

Тогда из уравнений (11.8) видно, что два из трёх чисел p, q, r должны быть равны.

2) $A = B \neq C$ (без ограничения общности)

Уравнения удовлетворяются либо при $r = 0$, $\forall\, p$, q, то есть когда угловая скорость лежит в экваториальной плоскости, либо при $p = q = 0$, $\forall\, r$, когда вращение происходит вокруг оси OZ.

3) $A = B = C$

В данном случае любые p, q, r удовлетворяют уравнениям (11.8). Но также эллипсоид инерции является шаром; любая ось, проходящая через точку O, является главной. ■

1.3. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера

Твёрдое тело называется **динамически симметричным**, если какие-либо два главных момента равны. Будем считать, что $A = B$. Тогда ось Oz называется **осью динамической симметрии**. Выпишем динамические уравнения Эйлера в этом случае.

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - A)qr = 0, \\ A\dot{q} + (A - C)pr = 0, \\ C\dot{[h]} = 0. \end{cases} \tag{11.9}$$

Из последнего уравнения сразу следует, что

$$r \equiv r_0 = \text{const}. \tag{11.10}$$

В случае Эйлера вектор $\vec{K}_O$ постоянен. Можно без ограничения общности направить ось OZ вдоль вектора $\vec{K}_O$. Тогда, как видно из рисунка, для вектора $\vec{K}_O$ в системе координат $Oxyz$, связанной с телом, имеем:

$$\vec{K}_O = \begin{Vmatrix} Ap \\ Aq \\ Cr \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} K_O \sin\theta \sin\phi \\ K_O \sin\theta \cos\phi \\ K_O \cos\theta \end{Vmatrix} \tag{11.11}$$

Из выражения для z-компоненты вектора $\vec{K}_O$, учитывая постоянство $r \equiv r_0$, получаем:

$$Cr_0 = K_O \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{Cr_0}{K_O} = \text{const}, \quad \theta \equiv \theta_0 = \text{const}. \tag{11.12}$$

Тем самым было показано, что движение динамически симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой состоит из вращения тела вокруг оси, связанной с ним (ось динамической симметрии Oz), и вращения этой оси вокруг пересекающей её неподвижной оси (оси OZ, которая сонаправлена с вектором $\vec{K}_O$). Такое движение называют **прецессией**.

Перепишем кинематические уравнения Эйлера (11.2) с учётом полученного результата $\theta \equiv \theta_0$, а также выразим p, q и r из компонент вектора $\vec{K}_O$.

$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\theta_0 \sin\phi, \\ q = \dot\psi \sin\theta_0 \cos\phi, \\ r_0 = \dot\psi \cos\theta_0 + \dot\phi, \end{cases} \qquad \begin{cases} p = (K_O/A) \sin\theta_0 \sin\phi, \\ q = (K_O/A) \sin\theta_0 \cos\phi, \\ r_0 = (K_O/C) \cos\theta_0. \end{cases} \tag{11.13}$$

Приравнивая выражения для p и для q, замечая, что $\sin\phi$ и $\cos\phi$ не обращаются одновременно в ноль, и полагая $\theta_0 \neq 0$, получаем тождество

$$\dot\psi = \frac{K_O}{A} = \text{const}, \qquad \omega_2 \equiv \dot\psi. \tag{11.14}$$

Тогда из последнего из кинематических уравнений Эйлера имеем:

$$\dot\phi = r_0 - \dot\psi\cos\theta_0 = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right) = \text{const}, \qquad \omega_1 \equiv \dot\phi. \tag{11.15}$$

Таким образом, было показано, что движение динамически симметричного тела с неподвижной точкой в случае Эйлера является **регулярной прецессией**.
Прецессия называется **регулярной**, если вращение тела вокруг связанной с ним оси и вращение самой этой оси происходят с постоянными по величине угловыми скоростями. Регулярная прецессия полностью описывается тремя числами: **углом нутации** θ_0, **угловой скоростью собственного вращения** $\omega_1 \equiv \dot\phi$ и **угловой скоростью прецессии** $\omega_2 \equiv \dot\psi$.

Если же $\theta_0 = 0$, приходим к случаю вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Углы Эйлера вырождаются, и углы ψ и ϕ становится невозможно определить; кинематические уравнения Эйлера теряют смысл. Тело будет обладать одной степенью свободы, его положение полностью определяется углом поворота вокруг оси OZ, который формально совпадает с величиной $\psi + \phi$. Угловая скорость тела будет сонаправлена с $\vec{K}_O$ и равна по модулю $\omega = K_O/C$, что формально получается из $\omega_1 + \omega_2$ при $\theta_0 = 0$.

1.4. Геометрическая интерпретация Пуансо случая Эйлера

Будем полагать, что ни один из моментов инерции твёрдого тела не равен 0 (исключим из рассмотрения материальную точку и бесконечно тонкий стержень). В главных осях инерции $Oxyz$, связанных с телом, эллипсоид инерции, по своему определению, задаётся уравнением

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \tag{11.16}$$

Обозначим через P точку пересечения мгновенной оси вращения и эллипсоида инерции.

$$\vec{OP} = \lambda\vec\omega.$$

В точке P гладкой поверхности можно провести касательную плоскость π. Кривая, которую точка P описывает на эллипсоиде, называется **полодией**, а кривая на плоскости — **герполодией**.

Опишем движение эллипсоида, для чего докажем следующие три свойства этого движения.

1) Коэффициент пропорциональности между $\vec{OP}$ и $\vec\omega$ постоянен: $\lambda = \text{const}$.

Выберем такой коэффициент, чтобы в данный момент времени $\vec{OP} = \lambda\vec{\omega}$. Подставим координаты вектора $\vec{OP}$ в уравнение эллипсоида инерции.

$$\vec{OP} = \begin{Vmatrix} \lambda p \\ \lambda q \\ \lambda r \end{Vmatrix} \qquad A(\lambda p)^2 + B(\lambda q)^2 + C(\lambda r)^2 = 1. \tag{11.17}$$

В случае Эйлера существует интеграл кинетической энергии (11.6):

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}. \tag{11.18}$$

2) Во всё время движения $\vec{K}_O \perp \pi$.

Нормаль к гладкой поверхности (она же нормаль к касательной плоскости) легко получить из уравнения эллипсоида $F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$

$$\vec{N} = \nabla F = \begin{Vmatrix} 2Ax \\ 2By \\ 2Cz \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2A\lambda p \\ 2B\lambda q \\ 2C\lambda r \end{Vmatrix} = 2\lambda \vec{K}_O. \tag{11.19}$$

Здесь подставлены координаты точки P, тем самым найдена нормаль к π, которая, как видно, коллинеарна вектору $\vec{K}_O$.

Теперь можно явно выписать уравнение плоскости π:

$$\frac{(Ap)x + (Bq)y + (Cr)z}{\sqrt{(Ap)^2 + (Bq)^2 + (Cr)^2}} = d, \quad (\vec{K}_O, \vec{[h]}) = K_O d. \tag{11.20}$$

3) Число d, равное расстоянию от начала координат до плоскости (см. $\overrightarrow{OQ}$ на рис. 11.2), оказывается постоянным. Покажем это подставив координаты точки P:

$$(\vec{K}_O, \lambda\vec{\omega}) = 2T\lambda = K_O d \quad \Rightarrow \quad d = \left|\vec{OQ}\right| = \frac{2T\lambda}{K_O} = \frac{\sqrt{2T}}{K_O}. \tag{11.21}$$

Найти $\left|\vec{OQ}\right|$ также можно путем проецирования $\overline{OP}$ на $\vec{K}_O$, ведь последний, как было показано, перпендикулярен плоскости π.

$$\left|\vec{OQ}\right| = \frac{(\overline{OP}, \vec{K}_O)}{K_O} = \frac{\lambda(\vec{\omega}, \vec{K}_O)}{K_O} = \frac{\lambda 2T}{K_O} = \frac{\sqrt{2T}}{K_O}. \tag{11.22}$$

Постоянство расстояния от плоскости π до начала координат вкупе со вторым свойством оно позволяет показать, что плоскость π остаётся неизменной в абсолютной системе координат во всё время движения, что также видно из уравнения плоскости в системе координат $OXYZ$:

$$\pi: \quad (\vec{K}_O, \vec{[h]}) = \sqrt{2T}. \tag{11.23}$$

Заметим также, что скорость точки твёрдого тела P согласно формуле Эйлера равна нулю. Значит, в этой точке равна нулю переносная скорость движения системы $Oxyz$, а следовательно, и скорость точки P эллипсоида инерции.

Таким образом, в случае Эйлера, твёрдое тело движется так, что эллипсоид инерции «катится» без проскальзывания по неподвижной в абсолютной системе координат плоскости π, которая перпендикулярна вектору $\vec{K}_O$, при этом радиус-вектор, направленный в точку касания эллипсоида и плоскости, пропорционален вектору ω.

[h]

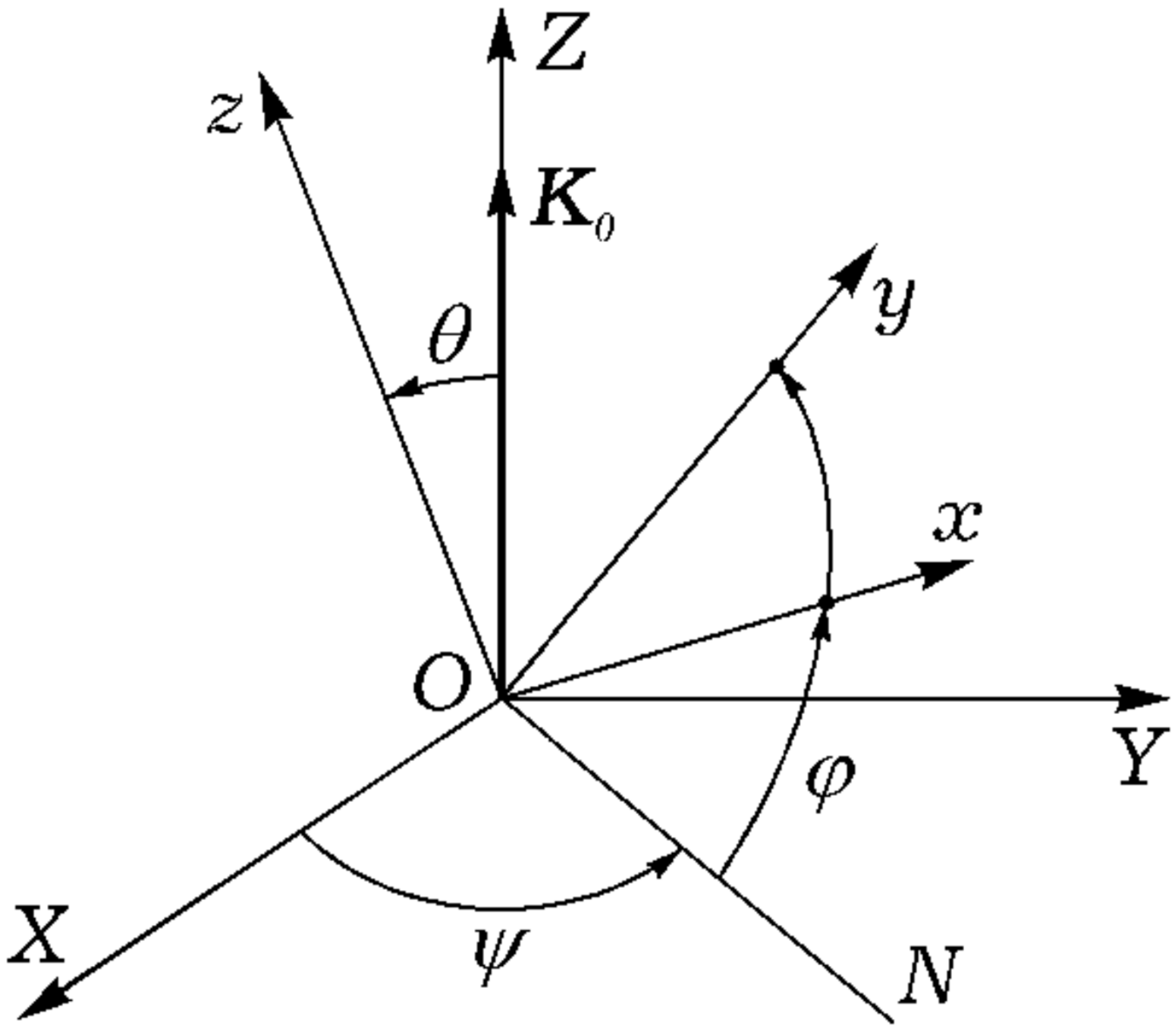

Рис. 11.1

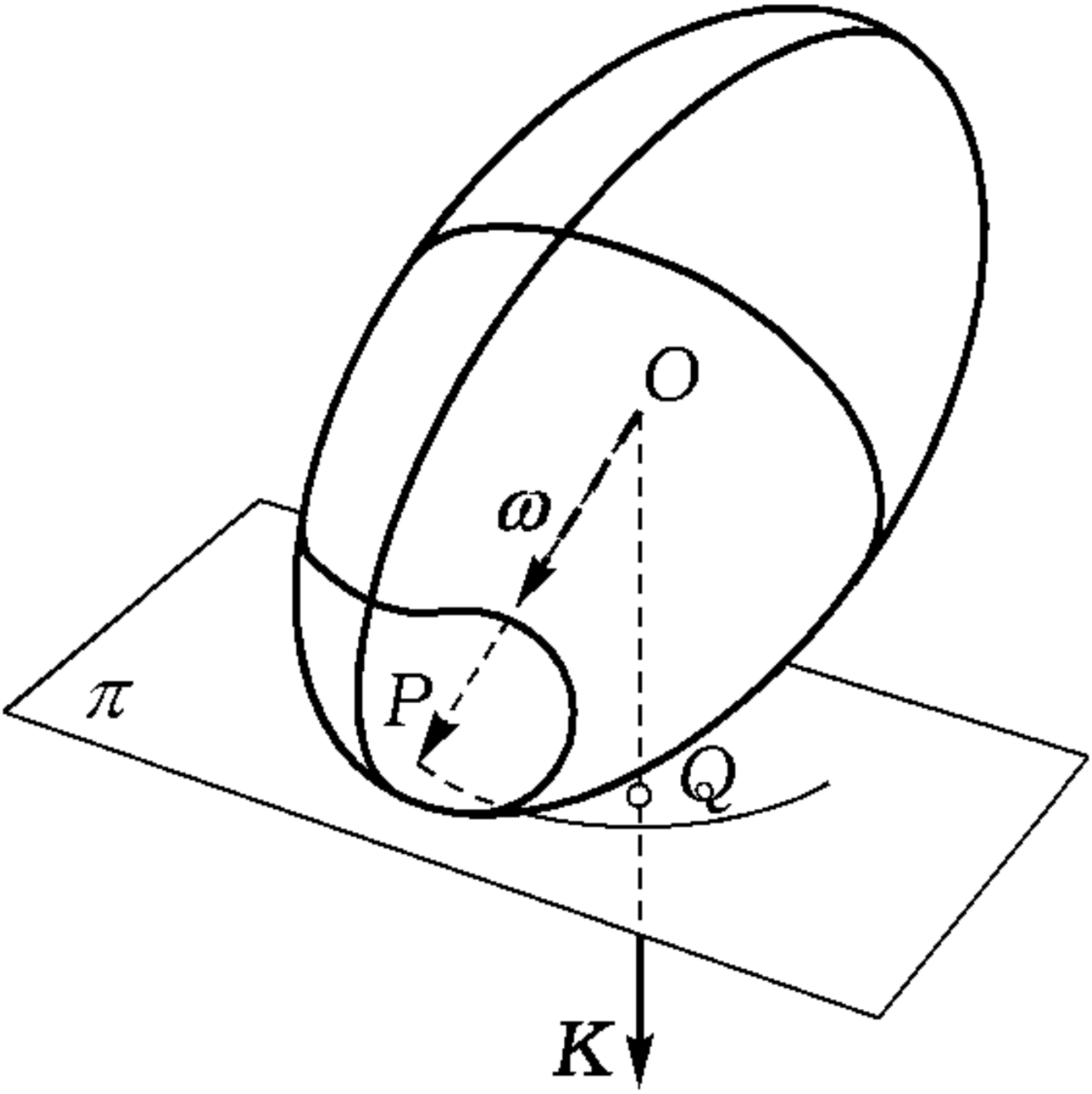

Рис. 11.2: Эллипсоид инерции

2. Вынужденная регулярная прецессия. Основная формула гироскопии

Определим, каким должен быть момент сил, приложенный к динамически симметричному твёрдому телу с неподвижной точкой (такое тело называют **гироскопом**), чтобы оно совершало регулярную прецессию. Т. е. такой момент, что функции:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 = \text{const}, \\ \dot\phi(t) &= \omega_1 = \text{const}, \\ \dot\psi(t) &= \omega_2 = \text{const} \end{aligned} \tag{11.24}$$

являлись решением систем уравнений

$$\begin{cases} A\dot p + (C-A)qr = M_x, \\ A\dot q + (A-C)pr = M_y, \\ C\dot{[h]} = M_z, \end{cases} \qquad \begin{cases} p = \dot\psi\sin\theta\sin\phi + \dot\theta\cos\phi, \\ q = \dot\psi\sin\theta\cos\phi - \dot\theta\sin\phi, \\ r = \dot\psi\cos\theta + \dot\phi. \end{cases} \tag{11.25}$$

Подставляя решения в кинематические уравнения Эйлера, находим, что $r \equiv r_0$, и определяем $p = p(\phi)$, $q = q(\phi)$.

$$\begin{cases} p = \omega_2\sin\theta_0\sin\phi, \\ q = \omega_2\sin\theta_0\cos\phi, \\ r = \omega_2\cos\theta_0 + \omega_1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot p = \omega_1\omega_2\sin\theta_0\cos\phi, \\ \dot q = -\omega_1\omega_2\sin\theta_0\sin\phi, \\ \dot{[h]} = 0. \end{cases} \tag{11.26}$$

Подставляя найденные зависимости в динамические уравнения Эйлера, находим координаты момента сил в подвижной системе координат M_x, M_y, M_z.

$$\begin{aligned} &M_x = A\omega_1\omega_2\sin\theta_0\cos\phi + (C-A)\omega_2\sin\theta_0\cos\phi(\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1), \\ &M_y = -A\omega_1\omega_2\sin\theta_0\sin\phi - (C-A)\omega_2\sin\theta_0\sin\phi(\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1), \\ &M_z = 0. \end{aligned} \tag{11.27}$$

Или после преобразований:

$$\begin{aligned} M_x &= \omega_1\omega_2\sin\theta_0\cos\phi\left\{A + (C-A)\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0 + 1\right)\right\}, \\ M_y &= -\omega_1\omega_2\sin\theta_0\sin\phi\left\{A + (C-A)\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0 + 1\right)\right\}, \\ M_z &= 0. \end{aligned} \tag{11.28}$$

Заметим, что момент $\vec M_O$ сонаправлен с $[\vec\omega_2 \times \vec\omega_1]$.

$$[\vec\omega_2 \times \vec\omega_1] = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ \omega_2\sin\theta_0\sin\phi & \omega_2\sin\theta_0\cos\phi & \omega_2\cos\theta_0 \\ 0 & 0 & \omega_1 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \omega_1\omega_2\sin\theta_0\cos\phi \\ -\omega_1\omega_2\sin\theta_0\sin\phi \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{11.29}$$

Запишем уравнение, определяющее необходимый момент, в векторной форме

$$\vec M_O^{(e)} = [\vec\omega_2 \times \vec\omega_1]\left\{C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0\right\}. \tag{11.30}$$

Формула (11.30) называется **основной формулой гироскопии**.

2.1. О приближённой теории гироскопа

На практике важен случай, когда угловая скорость собственного вращения сильно превосходит угловую скорость прецессии $\omega_1 \gg \omega_2$, тогда уравнение (11.30) переходит в приближённую формулу гироскопии:

$$\vec{M}_O \approx C[\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1]. \tag{11.31}$$

В приближённой теории гироскопа также обычно предполагают, что кинетический момент твёрдого тела

$$\vec{K}_O = \hat{J}_O(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \approx \hat{J}_O\vec{\omega}_1 = C\vec{\omega}_1. \tag{11.32}$$

Тогда теорему об изменении кинетического момента можно приближённо записать следующим образом:

$$\vec{M}_O \approx C[\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1] \approx [\vec{\omega}_2 \times \vec{K}_O] \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{K}_O}{dt} \approx [\vec{\omega}_2 \times \vec{K}_O]. \tag{11.33}$$

Последнее уравнение можно получить сразу из **теоремы Резаля** — геометрической интерпретации теоремы об изменении кинетического момента, которая гласит, что *скорость конца вектора кинетического момента геометрически равна моменту внешних сил*, если положить, что $\vec{K}_O \approx C\vec{\omega}_1$ прецессирует с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$.

Пример 1 Пусть динамически симметричное тело с неподвижным центром масс (уравновешенный гироскоп) раскручен до угловой скорости $\vec{\omega}_1$ вокруг своей оси симметрии. Такой гироскоп будет свободно вращаться в однородном поле тяжести, т. к. момент сил тяжести относительно неподвижной точки равен нулю.
Пусть в течении малого времени τ в точке на его оси симметрии на расстоянии h от центра масс была приложена сила $\vec{F}$. Тогда, как видно из теоремы Резаля, кинетический момент за время τ повернётся на малый угол β в направлении вектора $\vec{M} = [\vec{h} \times \vec{F}]$ на величину $\mathrm{Fh}\,\tau$.
Угол поворота при малых τ и больших ω_1 можно определить как

$$\beta \approx \operatorname{tg}\beta \approx \frac{\mathrm{Fh}\,\tau}{K_O} = \frac{\mathrm{Fh}\,\tau}{C\omega_1}. \tag{11.34}$$

Видно, что чем больше ω_1, тем меньше угол отклонения β. *Быстро вращающийся гироскоп стремится сохранить своё положение в пространстве.* $*$

Когда гироскоп совершает вынужденную прецессию под действием внешнего момента $\vec{M}_O$, на источник внешних сил, согласно третьему закону Ньютона, действуют со стороны гироскопа действуют силы, суммарный момент сил которых относительно неподвижной точки, равен $\vec{M}_{\text{гир}} = -\vec{M}_O$. Этот момент называется **гироскопическим моментом**.

$$\vec{M}_{\text{гир}} \approx C[\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2]. \tag{11.35}$$

[h]

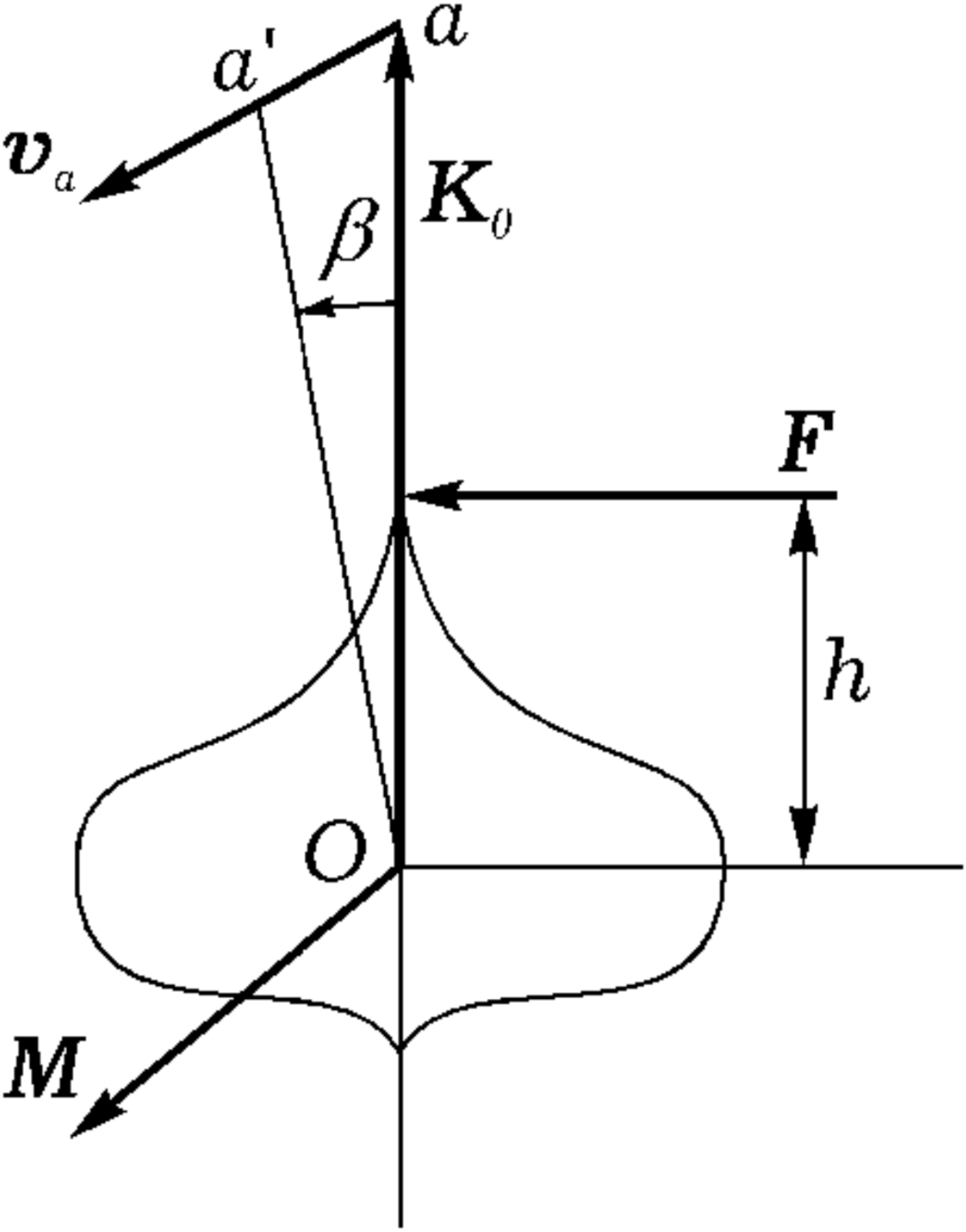

Рис. 11.3

3. Движение тяжёого твердого тела вокруг неподвижной точки

Рассмотрим движение твёрдого тела с неподвижной точкой O в однородном поле тяжести $\vec{g}$. Абсолютную систему координат $OXYZ$ выберем так, чтобы ось OZ была направлена вертикально вверх. Также введём систему координат $Oxyz$, жёстко связанную с телом, оси которой направим вдоль главных осей инерции. Координаты центра тяжести G в подвижной системе координат $Oxyz$ обозначим через a, b, c. Координаты единичного вектора $\vec{n}$, направленного вдоль оси OZ, в данной системе обозначим через γ_1, γ_2, γ_3.

$$\vec{OG} = \begin{Vmatrix} a \\ b \\ c \end{Vmatrix} \quad \vec{n} = \begin{Vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta \end{Vmatrix} \tag{11.36}$$

Если также обозначить вес тела через $\vec{P} = m\vec{g}$, то момент внешних сил относительно точки O будет равен

$$\vec{M}_O^{(e)} = [\vec{OG} \times \vec{P}] = P[\vec{n} \times \vec{OG}] = P \begin{Vmatrix} \gamma_2 c - \gamma_3 b \\ \gamma_3 a - \gamma_1 c \\ \gamma_1 b - \gamma_2 a \end{Vmatrix} \tag{11.37}$$

Как и прежде, обозначим главные моменты инерции через A, B, C, а координаты угловой скорости тела в подвижной системе координат — через p, q, r.

$$\hat{J}_O \xrightarrow[Oxyz]{} J = \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{Vmatrix} p \\ q \\ r \end{Vmatrix} \quad \vec{K}_O = \begin{Vmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{Vmatrix} \tag{11.38}$$

В введённых обозначениях динамические и кинематические уравнения Эйлера будут иметь вид:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = P(\gamma_2 c - \gamma_3 b), \\ B\dot{q} + (A-C)pr = P(\gamma_3 a - \gamma_1 c), \\ C\dot{[h]} + (B-A)pq = P(\gamma_1 b - \gamma_2 a), \end{cases} \qquad \begin{cases} p = \dot{\psi}\gamma_1 + \dot{\theta}\cos\phi, \\ q = \dot{\psi}\gamma_2 - \dot{\theta}\sin\phi, \\ r = \dot{\psi}\gamma_3 + \dot{\phi}. \end{cases} \tag{11.39}$$

Этой системы из шести дифференциальных уравнений достаточно для определения шести неизвестных функций $\vec{\omega}(t)$ и $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\phi(t)$. Однако в данном случае возможно перейти к системе уравнений относительно других шести функций, которая является алгебраической (не содержащей тригонометрических функций).

Учтём, что вектор $\vec{n}$ в абсолютной системе координат постоянен. Значит,

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{n}] + \frac{d\vec{n}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{n} \cdot \vec{\omega}. \tag{11.40}$$

Или покоординатно:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma_1} &= \gamma_2 r - \gamma_3 q, \\ \dot{\gamma_2} &= \gamma_3 p - \gamma_1 r, \\ \dot{\gamma_3} &= \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{aligned} \tag{11.41}$$

Уравнения (11.41) называются **уравнения Пуассона**. Совместно с динамическими уравнениями Эйлера они образуют полную систему дифференциальных уравнений, достаточную для нахождения функций $\vec{\omega}(t)$ и $\vec{n}(t)$ (**уравнения Эйлера – Пуассона**).

Далее уравнения (11.36) позволяют при известных $\vec{n}(t)$ найти $\theta(t)$ и $\phi(t)$. Для нахождения $\psi(t)$ достаточно проинтегрировать любое из кинематических уравнений Эйлера.

3.1. Интегралы уравнений Эйлера – Пуассона

Во-первых, так как теперь рассматриваются уравнения относительно p, q, r и γ_1, γ_2, γ_3, то имеет смысл явно отметить, что

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{11.42}$$

Во-вторых, как следует из теоремы об изменении кинетического момента, проекция кинетического момента на ось OZ постоянна:

$$\frac{d\vec{K}_O \cdot \vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{K}_O}{dt} \cdot \vec{n} = \vec{M}_O^{(e)} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{K}_O \cdot \vec{n} = \text{const}. \tag{11.43}$$

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}. \tag{11.44}$$

В-третьих, т. к. единственная сила, совершающая работу над телом, потенциальна, из теоремы об изменении кинетической энергии следует интеграл энергии: $T + \Pi = \text{const}$.

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{11.45}$$

$$\Pi = P\overrightarrow{OG} \cdot \vec{n} = P\overrightarrow{OG} \cdot \vec{n} = P(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3). \tag{11.46}$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3) = \text{const}. \tag{11.47}$$

Можно показать, что для сведения уравнений Эйлера – Пуассона к квадратурам достаточно ещё одного интеграла. Однако, как было, показано в общем случае, ещё одного алгебраического интеграла данных уравнений не существует. Но при определённых дополнительных условиях такой интеграл найти можно. Таких случаев известно три:

1) **Случай Эйлера**. Неподвижная точка совпадает с центром тяжести твёрдого тела: $a = b = c = 0$. В этом случае появляется интеграл кинетического момента $\vec{K}_O$.

2) **Случай Лагранжа**. Твёрдое тело динамчески симметрично, центр тяжести находится на оси вращения. Например, $A = B$, $a = b = 0$. Тогда, как видно из последнего из динамических уравнений Эйлера, $r \equiv \text{const}$.

3) **Случай Софьи Ковалевской**. Твёрдое тело динамически симметрично, момент инерции относительно оси, не лежащей в экваториальной плоскости, в два раза больше любого из других моментов инерции, а центр тяжести тела находится в экваториальной плоскости. Например, $A = B = 2C$, $c = 0$. Так как в этом случае любая ось, проходящая в экваториальной плоскости — главная, без ограничения общности можно считать, что $b = 0$. Тогда динамические уравнения Эйлера принимают вид

$$2\frac{dp}{dt} - qr = 0, \quad 2\frac{dq}{dt} + pr = \alpha\gamma_3, \quad \frac{d[h]}{dt} = -\alpha\gamma_2, \qquad \alpha \equiv \frac{Pa}{C}. \tag{11.48}$$

Данные уравнения имеют интеграл

$$(p^2 - q^2 - \alpha\gamma_1)^2 + (2pq - \alpha\gamma_2)^2 = \text{const}. \tag{11.49}$$

[h]

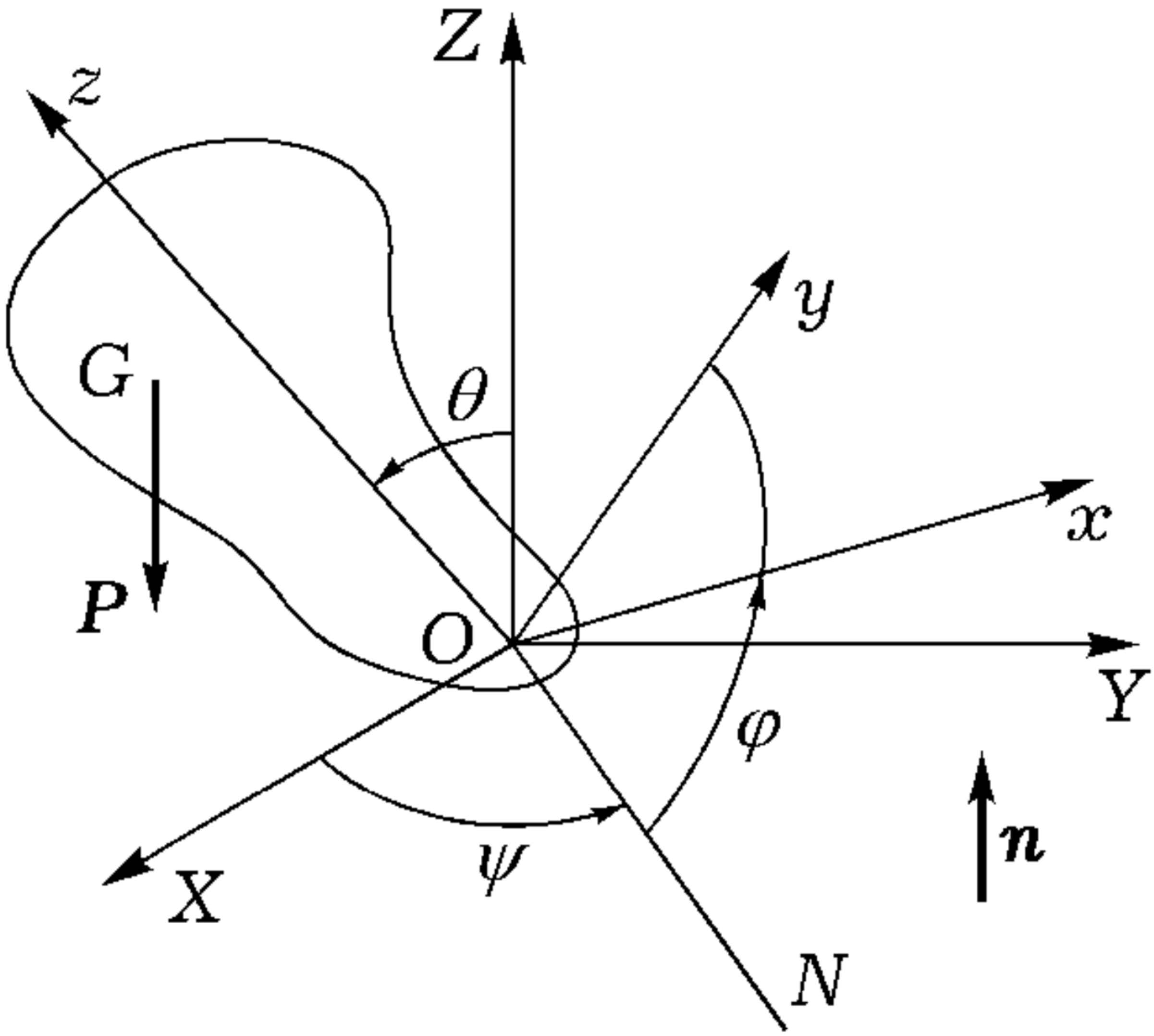

Рис. 11.4