

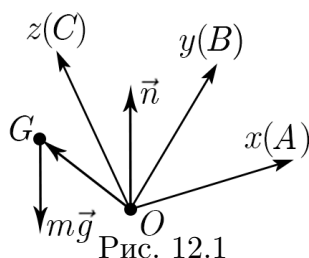
---

---

## ЛЕКЦИЯ 12

---

# ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ. СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА. УРАВНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА



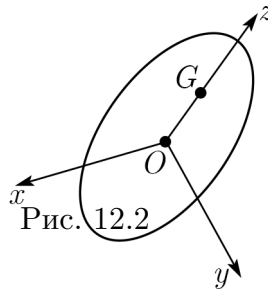
Рассмотрим твёрдое тело в поле тяжести, иначе называемое **тяжёлым твёрдым телом**. Оно движется вокруг неподвижной точки  $O$ . Обозначим центр масс тела как  $G$ . Он теперь также будет называться **центром тяжести**, потому что к нему приложена равнодействующая сил тяжести, действующих на тело. Сила тяжести  $\vec{F} = m\vec{g}$ . Построим главные оси инерции  $x$ ,  $y$  и  $z$  и обозначим главные моменты инерции относительно эти осей как  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Система координат  $Oxyz$  жёстко связана с телом и вращается вместе с ним. Вектор  $\vec{OG}$  в системе координат, связанной с телом, имеет компоненты  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , а вектор  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ .

На прошлой лекции были выписаны уравнения Эйлера–Пуассона, связывающие проекции угловой скорости  $p$ ,  $q$  и  $r$  и направляющие косинусы восходящей вертикали  $\vec{n}$  в системе координат, связанной с телом. Было установлено, что существует три интеграла.



Первый заключается в том, что  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ , второй выполняет роль интеграла площадей и означает постоянство проекции кинетического момента на вертикаль, а третий является интегралом энергии. Уравнений всего 6, значит, неплохо было бы найти ещё два интеграла движения. Однако структура дифференциальных уравнений такова, что, согласно теории последнего множителя Якоби, достаточно найти ещё один, четвёртый интеграл.

Перечислим известные случаи, когда этот интеграл существует.



3.51 cm

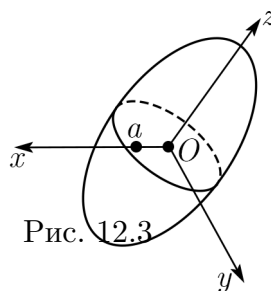
1). Случай Эйлера.

Пусть центр тяжести совпадает с точкой закрепления тела  $O$ . Тогда  $a = b = c = 0$ , момент внешних сил отсутствует, и имеет место случай Эйлера, который был подробно изучен на 10 и 11 лекциях. В этом случае дополнительным интегралом движения является квадрат кинетического момента:  $A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{const}$ .

2). Случай Лагранжа.

Пусть тело динамически симметрично, например,  $A = B$ , а также  $a = b = 0$ . Это означает, что центр тяжести лежит на оси симметрии (рис. 12.2). Он будет подробно изучаться на этой лекции. В случае Лагранжа четвёртый интеграл — это  $r = \text{const}$ . Иными словами, проекция угловой скорости на оси симметрии постоянна.





3.51 cm

3). Случай Ковалевской.

Главные моменты инерции удовлетворяют соотношению  $A = B = 2C$ , а также  $c = 0$ . Значит, тело динамически симметрично, и центр тяжести может занимать любое положение в плоскости  $xy$ . Поскольку  $A = B$ , то любые оси, проходящие через точку  $O$  и лежащие в плоскости  $xy$ , будут главными. Повернём их так, чтобы центр масс лежал на оси  $x$  (рис. 12.3).

Введём обозначение  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{mga}{C}$ . Тогда четвёртый интеграл — это алгебраический относительно проекций угловой скорости интеграл  $(p^2 - q^2 - \alpha\gamma_1)^2 + (2pq - \alpha\gamma_2)^2 = \text{const}$ . Он имеет четвёртую степень относительно неизвестных.

Последний случай подробно рассматриваться не будет, так как он выходит за границы данного курса. В случаях Эйлера и Лагранжа интегрирование уравнений сводится к эллиптическим функциям, а в случае Ковалевской — к гиперэллиптическим функциям. В качестве упражнения предлагается проверить, что интеграл Ковалевской действительно существует.

Лирическое отступление. Все последующие попытки найти дополнительные случаи, когда рассматриваемые уравнения интегрируются, не увенчались успехом. Однако при поиске таких случаев были достигнуты другие, не связанные с нахождением четвёртого интеграла результаты. Большой вклад в этот вопрос внесли российские учёные рубежа XIX – XX веков. Затем были попытки найти интегралы движения при малых параметрах, например, когда центр тяжести находится вблизи точки подвеса. Однозначных интегралов и в такой задаче не было найдено. В 70-ых годах XX столетия большой вклад в эту науку внёс профессор МГУ Валерий Васильевич Козлов, ныне вице-президент академии наук. Он развил теорию Пуанкаре и доказал, что во многих случаях дополнительного интеграла нет. Также значительный вклад в динамику твёрдого тела внесли учёные из института прикладной математики и механики национальной академии наук Украины в г. Донецк. Лектор сообщил, что этот институт тесно сотрудничает с российскими учёными, и у него до сих пор там сохранились личные связи и друзья.

## 1. Случай Лагранжа (волчок Лагранжа)

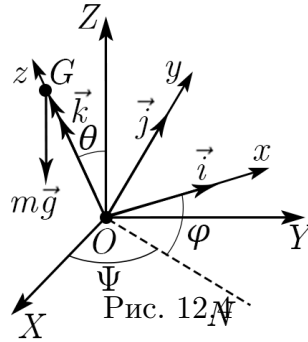
Обозначим неподвижную точку твёрдого тела как  $O$ . Введём неподвижную систему координат  $OXYZ$ . Ось  $OZ$  сонаправлена с единичным вектором  $\vec{n}$  и направлена по вертикали. Построим главные оси инерции твёрдого тела и обозначим их как  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Введём углы Эйлера. Обозначим прямую пересечения плоскости  $Oxy$  с плоскостью  $OXY$ , известную как линия узлов, как  $ON$ .

1. Угол собственного вращения  $\phi$  — угол между  $Ox$  и  $ON$ ;

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).



2. Угол прецессии  $\Psi$  — угол между  $OX$  и  $ON$ ;

3. Угол нутации  $\theta$  — угол между  $OZ$  и  $Oz$ .

Центр тяжести  $G$  находится на оси  $Oz$ . К нему приложена сила тяжести  $m\vec{g}$ . Обозначим вектор  $\vec{OG}$  как  $l$ . Также введём орты  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ . С учётом этих обозначений

$$\vec{M}_O = \vec{l} \times m\vec{g} = \vec{i}mgl\gamma_2 - \vec{j}mgl\gamma_1. \quad (12.1)$$

Из этой формулы видно, что  $M_z = 0$ . В системе координат, связанной с твёрдым телом,  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ . Напомним выражения для этих величин:

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \phi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \phi, \quad \gamma_3 = \cos \theta. \quad (12.2)$$

Теперь можем написать динамические уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = mgl\gamma_2, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = -mgl\gamma_1, \\ C \frac{dr}{dt} = 0. \end{cases} \quad (12.3)$$

Кроме того, запишем кинематические уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} p = \dot{\Psi}\gamma_1 + \dot{\theta} \cos \phi, \\ q = \dot{\Psi}\gamma_2 - \dot{\theta} \sin \phi, \\ r = \dot{\Psi}\gamma_3 + \dot{\phi}. \end{cases} \quad (12.4)$$

Наконец, запишем уравнения Пуассона, связывающие компоненты угловой скорости и направляющие косинусы вектора  $\vec{n}$ :

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{cases} \quad (12.5)$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

Из последнего уравнения (12.3) видно, что  $\frac{dr}{dt} = 0$ , значит,

$$r = r_0 = \text{const.} \quad (12.6)$$

Выражение (12.6) — искомый четвёртый интеграл движения в случае Лагранжа. Теперь займёмся поиском частных решений. Начнём с очевидных случаев.

1. Пусть  $p = q = 0$ ,  $r = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_3 = -1$ . В этом случае волчок висит под точкой подвеса и вращается с произвольной угловой скоростью вокруг оси симметрии, совпадающей с вертикалью.
2. Пусть  $p = q = 0$ ,  $r = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_3 = 1$ . Это «опрокинутый» волчок: он стоит над точкой подвеса и вращается с произвольной угловой скоростью вокруг оси симметрии.
3. Пусть  $\Psi = \text{const}$ ,  $\phi = \text{const}$ . Волчок качается как маятник, меняется только угол  $\theta$ . В этом случае угол нутации изменяется согласно уравнению

$$\ddot{\theta} - \frac{mgl}{A} \cos \theta = 0. \quad (12.7)$$

4. У волчка Лагранжа возможны регулярные прецессии. Они уже сложнее, чем предыдущие три решения. Пусть  $\theta = \theta_0 = \text{const}$  ( $\theta_0 \neq 0, \pi$ ),  $\dot{\Psi} = \omega_2 = \text{const}$ ,  $\dot{\phi} = \omega_1 = \text{const}$ ,  $\omega_1 \omega_2 \neq 0$ . При этом волчок вращается вокруг оси симметрии с постоянной по модулю угловой скоростью, а ось симметрии вращается вокруг вертикали с другой постоянной угловой скоростью.

Вычислим, когда такие прецессии возможны. Согласно основной формуле гироскопии, момент силы тяжести должен обеспечивать регулярную прецессию:

$$\vec{M}_O = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 \left( C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta \right). \quad (12.8)$$

В данном случае

$$\vec{M}_O = \frac{\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1}{\omega_2 \omega_1} mgl. \quad (12.9)$$

Из формул (12.8) и (12.9) видно, что прецессия может происходить только вокруг вертикали. Приравняем левые части этих равенств:

$$(C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta \omega_2^2 + C \omega_1 \omega_2 - mgl = 0. \quad (12.10)$$

Таким образом, только при выполнении равенства (12.10) регулярная прецессия возможна. Можно рассмотреть это соотношение как квадратное уравнение для  $\omega_2$ . Дискриминант этого уравнения обязательно должен быть неотрицательным:

$$C^2 \omega_1^2 + 4(C - A)mgl \cos \theta \geq 0. \quad (12.11)$$

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



*Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).*

Теперь будем искать остальные решения данной системы уравнений. Для этого будут использоваться интегралы движения. Запишем интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}Cr^2 + mgl\gamma_3 = \frac{1}{2}h, \quad (12.12)$$

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2mgl\gamma_3 = h. \quad (12.13)$$

Интеграл проекции кинетического момента на вертикаль:

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = b. \quad (12.14)$$

Интеграл проекции угловой скорости на ось симметрии:

$$r = r_0. \quad (12.15)$$

Геометрический интеграл (квадрат модуля вектора  $\vec{n}$ ):

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (12.16)$$

Используем интегралы (12.13), (12.14), (12.15) и (12.16), чтобы показать, что задача в случае Лагранжа сводится к квадратурам, следовательно, она интегрируется.

Согласно уравнениям (12.4) с учётом (12.2),

$$p^2 + q^2 = \dot{\Psi} \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2, \quad (12.17)$$

$$p\gamma_1 + q\gamma_2 = \dot{\Psi} \sin^2 \theta. \quad (12.18)$$

Перепишем интегралы (12.13), (12.14), и (12.15):

$$A(\dot{\Psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + 2mgl \cos \theta = h_1 = h - Cr_0^2, \quad (12.19)$$

$$A\dot{\Psi} \sin^2 \theta + Cr_0 \cos \theta = b, \quad (12.20)$$

$$\dot{\Psi} \cos \theta + \dot{\phi} = r_0. \quad (12.21)$$

Конечная цель этих вычислений такова: нужно получить углы Эйлера как функции времени. Это можно сделать, но в данном курсе будет проведено только качественное исследование. Из интеграла (12.20) следует, что

$$\dot{\Psi} = \frac{b - Cr_0 \cos \theta}{A \sin^2 \theta}. \quad (12.22)$$

Из интеграла (12.21) получаем

$$\dot{\phi} = r_0 - \frac{b - C \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \cos \theta. \quad (12.23)$$

Таким образом, если найти функцию  $\theta(t)$ , то можно подставить её в соотношения (12.22) и (12.23) и тем самым получить функции  $\Psi(t)$  и  $\phi(t)$ . Получим из интеграла (12.19) уравнение для  $\theta$ .

$$\dot{\theta} = \frac{h_1 - 2mgl \cos \theta}{A} - \frac{(b - C \cos \theta)^2}{A^2 \sin^2 \theta}. \quad (12.24)$$

Формула (12.24) — это уравнение с разделяющимися переменными. Извлечением из неё квадратного корня можно получить функцию  $\dot{\theta}(\theta)$ . Таким образом, задача сводится к квадратурам, и в результате получается эллиптический интеграл.

Подробный анализ случая Лагранжа лучше посмотреть в литературе по динамике твёрдого тела. На эту тему написано много хороших книг.



*Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)*

7 ! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

### 1.1. Качественный анализ движения

Введём вместо  $\theta$  переменную  $u \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta$ . Её производная  $\dot{u} = -\sin \theta \cdot \dot{\theta}$ . Тогда уравнение (12.24) можно переписать так:

$$A\dot{u}^2 = A(h - 2mglu)(1 - u^2) - (b - Cr_0u)^2 = f(u). \tag{12.25}$$

Заметим, что для реального движения функция  $f(u)$  должна быть неотрицательна, так как слева стоит квадрат величины  $A\dot{u}$ .

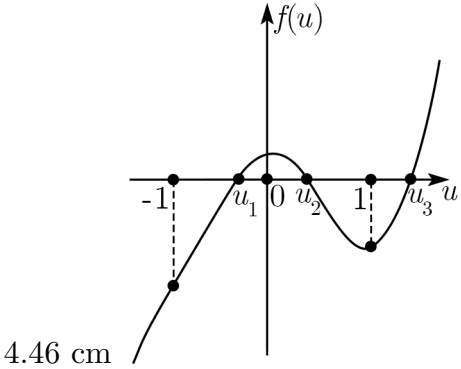


Рис. 12.5: Эскиз графика функции  $f(u)$

Пусть начальные условия таковы, что  $b \neq \pm Cr_0$ . Функция  $f(u)$  — многочлен третьей степени по  $u$ , значит, вещественных корней у неё может быть 3 или 1. Подсчитаем значения функции в некоторых важных точках:

$$f(\pm 1) = -(b \mp Cr_0)^2 < 0, \tag{12.26}$$

$$f(\pm \infty) = \pm \infty. \tag{12.27}$$

Значит, функция  $f(u)$  ведёт себя так, как показано на рисунке 12.5. Так как реальное движение есть, то эта функция должна в каких-то точках пересекать ось  $Ou$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Есть два корня  $u_1$  и  $u_2$ , принадлежащие этому отрезку, и есть корень  $u_3 > 1$ . Реальное движение отвечает изменению  $u$  между  $u_1$  и  $u_2$ :  $u_1 \leq u \leq u_2$ . Получается, что  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где  $\cos \theta_1 = u_1$ ,  $\cos \theta_2 = u_2$ .

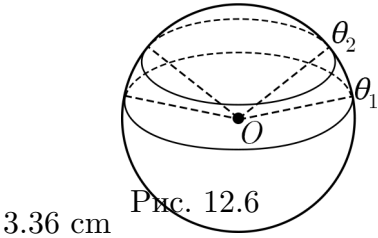


Рис. 12.6

Нарисуем единичную сферу с центром в точке  $O$ . Проведём линии, соответствующие  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$  (это будут окружности на сфере). Из вышесказанного следует, что реальное движение происходит в поясе между этими окружностями. Волчок движется так, что угол  $\theta$  меняется от  $\theta_1$  до  $\theta_2$  (рис. 12.6).

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Представим, что ось симметрии пересекает эту единичную сферу. Точка пересечения описывает на сфере какую-то кривую. Кривые могут быть разными в зависимости от начальных данных.

1. Если  $b > Cr_0 \cos \theta_2$ , то  $\dot{\Psi} > 0$  (если  $b < Cr_0 \cos \theta_1$ , то  $\dot{\Psi} < 0$ ). Тогда угол  $\Psi$  монотонно возрастает (убывает). След на единичной сфере будет таким, как показано на рис. 12.7. Между верхней и нижней параллелью точка пересечения описывает синусообразную кривую.
2. Пусть  $b = Cr_0 \cos \theta_2$ . Тогда  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\Psi} = 0$ . В этом случае на верхней параллели будут находиться точки возврата (рис. 12.7).
3. Случай  $b = Cr_0 \cos \theta_1$  невозможен. При этом на нижней параллели должны были бы выполняться равенства  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\Psi} = 0$ . Кинетическая энергия и момент в нижней точке минимальны, волчку нужно подниматься. Но энергия должна сохраняться, а дополнительной энергии на подъём взяться неоткуда.
4. Пусть  $Cr_0 \cos \theta_1 < b < Cr_0 \cos \theta_2$ . Тогда след на единичной сфере будет таким, как показано на рис. 12.7. Монотонного изменения угла  $\Psi$  не будет; иногда будет попятное движение. Угол  $\theta_*$ , при котором  $\dot{\Psi} = 0$ , вычисляется по формуле  $\cos \theta_* = \frac{b}{Cr_0}$ .
5. Если по начальным данным  $u_1 = u_2$ , то параллели  $\theta_1$  и  $\theta_2$  совпадают, и движение будет регулярной прецессией.

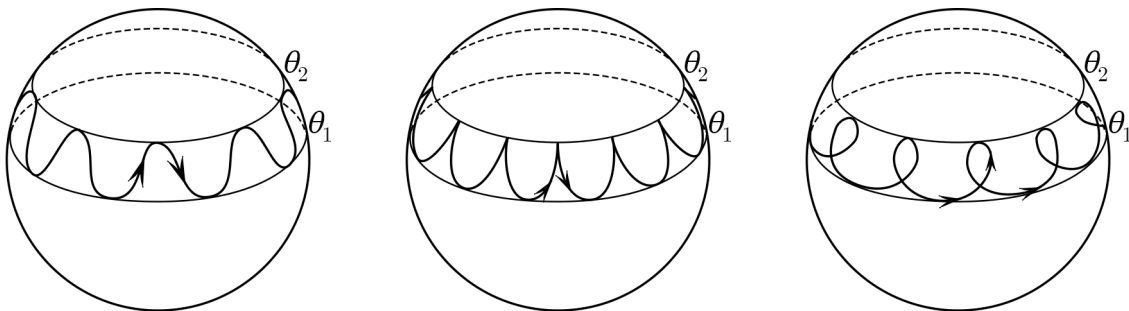


Рис. 12.7

Теперь перейдём к изучению уравнений аналитической динамики.

## 2. Уравнения аналитической динамики

Сначала напомним некоторые обозначения, определения (виртуальные перемещения, идеальные связи), осуществим общую постановку задачи динамики. Из дальнейшего будет видно, что если связи идеальные, то зачастую задачу по динамике можно решить.

Предположим, что имеется система материальных точек  $P_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, N$ . Начало отсчёта обозначим как  $O$ , радиус-вектор точки  $P_\nu$  — как  $\vec{r}_\nu$  (рис. 12.8).





**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

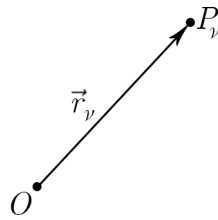


Рис. 12.8

В общем случае система несвободна, у неё имеется  $r$  геометрических связей:

$$f_\alpha(\vec{[h]}_\nu, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r. \quad (12.28)$$

Также у системы имеется  $s$  дифференциальных связей:

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{a}_{\beta\nu} \cdot \vec{v}_\nu + a_\beta = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, s. \quad (12.29)$$

Запишем координаты радиус-векторов, скоростей и ускорений точек:  $\vec{[h]}_\nu = \begin{pmatrix} x_\nu \\ y_\nu \\ z_\nu \end{pmatrix}$ ,

$\vec{v}_\nu = \begin{pmatrix} \dot{x}_\nu \\ \dot{y}_\nu \\ \dot{z}_\nu \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w}_\nu = \begin{pmatrix} \ddot{x}_\nu \\ \ddot{y}_\nu \\ \ddot{z}_\nu \end{pmatrix}$ . Для краткости введём обозначения  $3N$ -мерных векторов,

относящихся к системе в целом:  $\vec{[h]} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} [h]_1 \\ \dots \\ [h]_N \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \dots \\ \vec{v}_N \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \dots \\ \vec{w}_N \end{pmatrix}$ . Распишем

компоненты вектора  $\vec{a}_{\beta\nu} = \begin{pmatrix} a_{\beta\nu x} \\ a_{\beta\nu y} \\ a_{\beta\nu z} \end{pmatrix}$ .

Ограничения на скорости системы даются не только уравнениями (14.2), но и уравнениями (14.1):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial [h]_\nu} \cdot \vec{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0. \quad (12.30)$$

Количество ограничений (14.2) и (13.3) равно  $r + s$ . Будем предполагать, что все связи независимы. Введём матрицу  $K$  размерности  $(r + s) \times 3N$ :

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} & \frac{\partial f_1}{\partial y_N} & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial y_1} & \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_N} & \frac{\partial f_r}{\partial y_N} & \frac{\partial f_r}{\partial z_N} \\ a_{11x} & a_{11y} & a_{11z} & \dots & a_{1Nx} & a_{1Ny} & a_{1Nz} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1x} & a_{s1y} & a_{s1z} & \dots & a_{sNx} & a_{sNy} & a_{sNz} \end{pmatrix}. \quad (12.31)$$

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

Введём также вектор  $\vec{k}$  размера  $r + s$ , состоящий из свободных членов уравнений (13.3):

$$\vec{k} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial f_r}{\partial t} \quad a_1 \quad \dots \quad a_s \right)^T. \quad (12.32)$$

С учётом этих обозначений соотношения (14.2) и (13.3) можно написать так:

$$K\vec{v} + \vec{k} = 0. \quad (12.33)$$

Ограничения на ускорения также накладываются как дифференциальными, так и геометрическими связями. Продифференцируем по времени соотношение (13.4):

$$K\vec{w} + \frac{dK}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt} = 0. \quad (12.34)$$

С учётом введённых обозначений можно кратко сформулировать условия независимости всех соотношений (14.2) и (13.3):  $\text{rank } K = r + s$ . Иными словами, *независимость всех связей эквивалентна линейной независимости строк матрицы  $K$* .

Запишем виртуальные перемещения в координатном виде:  $\delta\vec{h}_\nu = \begin{pmatrix} \delta x_\nu \\ \delta y_\nu \\ \delta z_\nu \end{pmatrix}$ . Введём обозначение  $3N$ -мерного виртуального перемещения системы:  $\delta\vec{h} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \delta\vec{h}_1 \\ \dots \\ \delta\vec{h}_N \end{pmatrix}$ . Напомним, что виртуальные перемещения — это величины, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{h}_\nu} \cdot \delta\vec{h}_\nu = 0, \quad (12.35)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\vec{h}_\nu = 0. \quad (12.36)$$

С учётом матрицы  $K$  соотношения (12.35) и (12.36) можно записать так:

$$K\delta\vec{h} = 0. \quad (12.37)$$

На прошлых лекция было выведено, что для системы материальных точек

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{h}_\nu. \quad (12.38)$$

Распишем по координатам векторы сил:  $\vec{F}_\nu = \begin{pmatrix} F_{\nu x} \\ F_{\nu y} \\ F_{\nu z} \end{pmatrix}$ ,  $\vec{h}_\nu = \begin{pmatrix} R_{\nu x} \\ R_{\nu y} \\ R_{\nu z} \end{pmatrix}$ . Для краткости можно ввести обозначения  $\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \dots \\ \vec{F}_N \end{pmatrix}$ ,  $\vec{h} = \begin{pmatrix} \vec{h}_1 \\ \dots \\ \vec{h}_N \end{pmatrix}$ . Введём также диагональную



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

матрицу  $M$  размера  $3N \times 3N$ :

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m_N \end{pmatrix}. \quad (12.39)$$

С учётом этих обозначений уравнения (12.38) можно записать в матричном виде:

$$M\vec{W} = \vec{F} + \vec{[h]}. \quad (12.40)$$

В уравнении (12.40)  $6N$  неизвестных:  $3N$  координат и  $3N$  проекций реакций связей. Уравнений движения (12.38) —  $3N$ , уравнений реакций связей —  $r + s$ . Таким образом,  $6N - (3N + r + s) = n$  — число степеней свободы. Не хватает ещё  $n$  соотношений. Проблема решается введением понятия идеальных связей.

**Определение 49:** Идеальные связи — это такие связи, работа реакций которых на любых виртуальных перемещениях равна нулю:

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{[h]}_{\nu} \cdot \delta\vec{[h]}_{\nu} = 0. \quad (12.41)$$



Или, если записать в матричном виде:

$$\vec{[h]} \cdot \delta\vec{[h]} = \vec{0}. \quad (12.42)$$

Выразим реакции связей через уравнения связи и некоторые неопределённые множители. Умножим каждое из равенств (14.1) на число  $\lambda_{\alpha}$ , каждое из равенств (14.2) — на  $\mu_{\beta}$  и вычтем сумму этих произведений из уравнений (13.8):

$$\sum_{\nu=1}^N \left( \vec{[h]}_{\nu} - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{[h]}_{\nu}} - \sum_{\beta=1}^s \mu_{\beta} \vec{a}_{\beta\nu} \right) \delta\vec{[h]}_{\nu} = 0. \quad (12.43)$$

Среди  $3N$  виртуальных перемещений только  $n$  независимых. Остальные  $r + s$  виртуальных перемещений могут быть выражены через них. Выберем коэффициенты  $\lambda_{\alpha}$  и  $\mu_{\beta}$  так, чтобы слагаемые с зависимыми виртуальными перемещениями в (12.43) стояли с нулевыми коэффициентами. После этого в (12.43) остаётся сумма по независимым виртуальным перемещениям. Она должна обращаться в ноль по определению идеальных связей. Таким образом,

$$\vec{[h]}_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{[h]}_{\nu}} + \sum_{\beta=1}^s \mu_{\beta} \vec{a}_{\beta\nu}. \quad (12.44)$$

Введём вектор  $P \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1 \dots \lambda_r \mu_1 \dots \mu_s)^T$ . Тогда выражение (13.9) можно записать в матричном виде:

$$\vec{[h]} = K^T \vec{P}. \quad (12.45)$$

Соотношения (12.38) запишутся так:

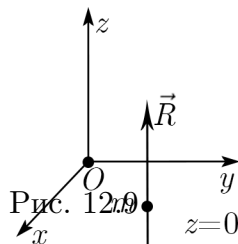
$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial [\vec{h}]_\nu} + \sum_{\beta=1}^s \mu_\beta \vec{a}_{\beta\nu}. \quad (12.46)$$

В уравнениях (12.46)  $3N + r + s$  неизвестных:  $3N$  координат и  $r + s$  неопределённых множителей. Но самих этих уравнений  $3N$ , а уравнений связи —  $r + s$ . Следовательно, получена полная система уравнений, описывающая движение системы, и она может быть решена. Уравнения (12.46) в совокупности с уравнениями связи (14.1) (14.2) называются **уравнениями Лагранжа первого рода**. Их также можно записать в матричном виде:

$$M\vec{W} = \vec{F} + K^T \vec{P}. \quad (12.47)$$

Уравнения Лагранжа первого рода довольно громоздки; с увеличением количества связей увеличивается и число неопределённых множителей, что усложняет систему уравнений. Хорошо бы получить такие уравнения, количество которых уменьшается с увеличением числа связей. Такие уравнения существуют, они называются **уравнениями Лагранжа второго рода** и будут выведены через пару лекций.

Рассмотрим два простых примера, иллюстрирующих уравнения Лагранжа первого рода.



1). Пусть точка с массой  $m$  движется в поле тяжести по плоскости  $z = 0$  (рис. 12.9). Ускорение свободного падения  $\vec{g}$  направлено вниз по оси  $z$ . Выпишем уравнения Лагранжа первого рода:

$$\begin{cases} z = 0, \\ m\ddot{x} = 0, \\ m\ddot{y} = 0, \\ m\ddot{z} = -mg + \lambda. \end{cases} \quad (12.48)$$

Так как  $z = 0$ , то из последнего равенства следует, что  $\lambda = mg$ . Значит, реакция связи направлена вертикально вверх и по модулю равна  $mg$ . Точка движется равномерно и прямолинейно или покоится в плоскости  $xy$ .

2). В стену забит гвоздь радиусом  $a$ , его поверхность является абсолютно гладкой. Через него перекинут нерастяжимая нить длины  $l$ , к обоим концам которого подвешены грузы массами  $m_1$  и  $m_2$ . Требуется найти ускорения грузов.

Направим ось  $x$  вниз (рис. 12.10). Считая грузы материальными точками, обозначим координату первого груза как  $x_1$ , а второго — как  $x_2$ . Запишем уравнения Лагранжа первого рода:

$$\{x_1 + x_2 + \pi a = l, m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + \lambda, m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g + \lambda. \quad (12.49)$$

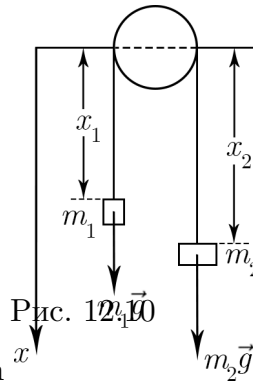


Рис. 3.23 см

Из первого уравнения следует, что  $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$ . Подставим это во второе и третье уравнения, и получим:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g, \quad (12.50)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g, \quad (12.51)$$

$$\lambda = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (12.52)$$

Таким образом, найдены и ускорения, и реакции нити. Знак «минус» в выражении для  $\lambda$  показывает, что эти реакции направлены вверх вдоль оси  $x$ .