ЛЕКЦИЯ 13

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ СТАТИКИ. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Общее уравнение динамики. Принцип Даламбера – Лагранжа

В механике рассматриваются т. н. **вариационные принципы**, причём они будут подразделяться на дифференциальные и интегральные вариационные принципы. Дадим определение понятия «принцип», которое будет использоваться в дальнейшем.

Определение 50: Принцип *— это выраженный математическим языком критерий, который позволяет из всех кинематически возможных движений выделить то, которое система действительно совершает.* ♣

В связи с бесконечностью кинематически возможных движений действительное движение выявляется с помощью принципов. **Дифференциальные вариационные принципы** определяют критерий истинного движения для данного момента времени. **Интегральные вариационные принципы**, в отличие от них, выделяют истинное движение на каком-то интервале времени. В этом семестре (вплоть до 15 лекции) будут рассматриваться только дифференциальные вариационные принципы — **принцип Даламбера – Лагранжа** и **принцип виртуальных перемещений**.

Выпишем некоторые вспомогательные формулы, выведенные на прошлой лекции.

Пусть имеется система материальных точек P_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Начало отсчёта обозначим как O, радиус-вектор точки P_ν — как $[\vec{h}]_\nu$ (рис. 13.1).

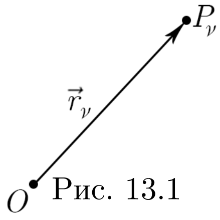


Рис. 13.1

В общем случае система несвободна, у неё имеется r геометрических связей:

$$f_\alpha(\vec{[h]}_\nu, t) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, r. \tag{13.1}$$

Также у системы имеется s дифференциальных связей:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{a}_{\beta\nu} \cdot \vec{v}_\nu + a_\beta = 0, \qquad \beta = 1, 2, \dots, s. \tag{13.2}$$

Ограничение на скорости системы вытекает не только из дифференциальных связей (14.2), но из геометрических (14.1):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{[h]}_\nu} \cdot \vec{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0. \tag{13.3}$$

Соотношения (14.2) и (13.3) задают ограничения на скорости системы, налагаемые всеми связями. На прошлой лекции вводилась матрица K размерности $(r+s) \times 3N$, составленная из коэффициентов при скоростях в (14.2) и (13.3). В силу независимости связей матрица K имеет ранг $r+s$. Также вводился вектор $\vec{k}$ размера $r+s$, состоящий из свободных членов этих уравнений. С помощью этих обозначений ограничения на скорости представляются в совсем простом виде:

$$K\vec{v} + \vec{k} = 0. \tag{13.4}$$

Здесь под $\vec{v}$ понимается $3N$-мерный вектор, составленный из скоростей точек.

Чтобы получить ограничения на ускорения, нужно продифференцировать по времени соотношение (13.4):

$$K\vec{w} + \frac{dK}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt} = 0. \tag{13.5}$$

Здесь $\vec{w}$ —$3N$-мерный вектор, составленный из ускорений точек. На прошлой лекции все подобные $3N$-мерные векторы были определены.

На прошлых лекциях было выведено, что для системы материальных точек

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{[h]}_\nu. \tag{13.6}$$

Введём диагональную матрицу M размерами $3N \times 3N$, на диагонали которой стоят массы точек системы, и $3N$-мерные вектора активных сил $\vec{F}$ и реакций $\vec{[h]}$. Тогда формулу (13.6) можно записать так:

$$M\vec{w} = \vec{F} + \vec{[h]}. \tag{13.7}$$

Предположим, что величины $\vec{[h]}_\nu$, $\vec{v}_\nu$ и $\vec{w}_\nu$ кинематически возможны в данный момент времени, то есть соотношения (13.4) и (13.5) выполняются. Поставим такой вопрос:

как из всех кинематически возможных величин выбрать такие из них, которые соответствуют реальному движению?

Ограничимся только идеальными связями. Это значит, что работа реакций связей на любых виртуальных перемещениях равна нулю:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{[h]}_\nu \cdot \delta\vec{[h]}_\nu = 0. \tag{13.8}$$

На прошлой лекции также было получено, что реакции идеальных связей можно выразить через неопределённые множители Лагранжа:

$$\vec{[h]}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{[h]}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \mu_\beta \vec{a}_{\beta\nu}. \tag{13.9}$$

Заметим, что если реакция определённой связи выражается по формуле (13.9), то она идеальна. Введём вектор P размера $r+s$, составленный из этих неопределённых множителей. Тогда выражение (13.9) можно записать в матричном виде:

$$\vec{[h]} = K^T \vec{P}. \tag{13.10}$$

Если подставить (13.9) в (13.6), получаются уравнения Лагранжа первого рода:

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{[h]}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \mu_\beta \vec{a}_{\beta\nu}. \tag{13.11}$$

Теорема 20 (Принцип Даламбера–Лагранжа) Чтобы функции $\vec{[h]}_\nu(t)$ в данный момент времени отвечали истинному движению, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{N} (\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{w}_\nu) \cdot \delta\vec{[h]}_\nu = 0.} \tag{13.12}$$

∗

Формула (14.3) называется **общим уравнением динамики**. Виртуальные перемещения нужно выбирать в данный момент времени.

Док-во: Необходимость. Пусть система совершает некоторое истинное движение. Тогда, разумеется, выполняется соотношение (13.6). Перепишем его так:

$$\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{w}_\nu = -\vec{[h]}_\nu. \tag{13.13}$$

Сосредоточимся на данном моменте времени, скалярно умножим обе части формулы (13.13) на $\delta\vec{[h]}_\nu$ и просуммируем по всем частицам:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{w}_\nu\right) \cdot \delta\vec{[h]}_\nu = -\vec{[h]}_\nu \cdot \delta\vec{[h]}_\nu \tag{13.14}$$

Поскольку связи идеальные, то в этом выражении справа стоит ноль. Следовательно, соотношение (14.3) выполняется.

Достаточность. Пусть связи идеальные и выполняется соотношение (14.3). Нужно показать, что тогда $\vec{w}_\nu$ таковы, что они удовлетворяют уравнению движения. Введём обозначение $\vec{\Phi}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} m_\nu \vec{w}_\nu - \vec{F}_\nu$. Тогда соотношение (14.3) запишется в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{\Phi}_\nu \cdot \delta\vec{[h]}_\nu = 0. \tag{13.15}$$

Поскольку связи идеальные, то выполняется (13.8), следовательно, реакции могут быть выражены по формуле (13.9). Значит, функции $\vec{\Phi}_\nu$ должны вычисляться так:

$$\vec{\Phi}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{r} \gamma_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{[h]}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \chi_\beta \vec{a}_{\beta\nu}. \tag{13.16}$$

Из формул (13.15) и (13.16) следует, что

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{r} \gamma_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{[h]}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \chi_\beta \vec{a}_{\beta\nu}. \tag{13.17}$$

Выражение (13.17) — не что иное, как уравнение Лагранжа первого рода, только с другими обозначениями для неопределённых коэффициентов. Следовательно, $\vec{w}_\nu$ удовлетворяет уравнениям движения, и движение является истинным. ■

Уравнение (14.3) удобно тем, что не содержит реакций связей. По сути, в выражении (14.3) содержится вся динамика, и можно было бы закончить лекции, всё остальное студенты додумали бы сами. Оно не зря называется общим уравнением динамики: из него выводятся практически все уравнения аналитической динамики. Заметим, что в (14.3) ровно столько скалярных уравнений, сколько существует независимых виртуальных перемещений, а именно, n — число степеней свободы.

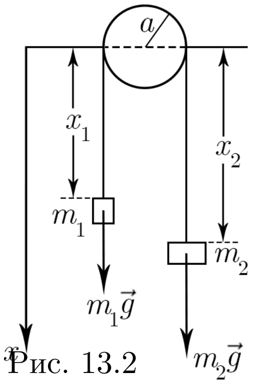
Если реакции неидеальны, нужно действовать следующим образом. Нужно выделить из них ту часть, которая приводит к ненулевой работе на виртуальных перемещениях, и отнести эту часть к активным силам. Но при этом в уравнения добавляются новые неизвестные. Чтобы от них избавиться, нужно добавить дополнительные физические гипотезы, которые могут замкнуть систему уравнений. Например, когда имеет место сила трения, можно ввести закон Кулона. Он, хоть и приближённо, позволяет решать задачи с трением.

Величины $-m_\nu \vec{w}_\nu$ — это **силы инерции** или **даламберовы силы инерции**. На 8 лекции вводились понятия переносной силы инерции и кориолисовой силы инерции. Не следует путать их с даламберовыми силами инерции. Значит, в (14.3) записана сумма работ сил инерции и активных сил. На виртуальных перемещениях эта сумма равна нулю. Таким образом, принцип Даламбера можно сформулировать так: *в любой момент времени сумма работ сил инерции и активных сил на любых виртуальных перемещениях равна нулю.*

Рассмотрим пример с предыдущей лекции. В стену забит гвоздь радиусом a, его поверхность является абсолютно гладкой. Через него перекинута нерастяжимая нить длины l, к обоим концам которого подвешены грузы массами m_1 и m_2. Ось x направлена вниз (рис. 13.2). Требуется найти ускорения грузов.

Запишем уравнение связи:

$$x_1 + x_2 + \pi a = l. \tag{13.18}$$



3.23 cm Рис. 13.2

Очевидно, что ускорения грузов $\ddot{x}_1$ и $\ddot{x}_2$ равны по модулю и противоположны по знаку: $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$. Теперь запишем общее уравнение динамики для данной одномерной задачи:

$$(m_1 g - m_1 \ddot{x}_1)\,\delta x_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{x}_2)\,\delta x_2 = 0. \tag{13.19}$$

Из уравнения связи также следует, что $\delta x_1 = -\delta x_2$. Подставим это в (13.19):

$$-\,(m_1 g + m_1 \ddot{x}_2)\,\delta x_2 + (m_2 g - m_2 \ddot{x}_2)\,\delta x_2 = 0, \tag{13.20}$$

$$[(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)\ddot{x}_2]\;\delta x_2 = 0. \tag{13.21}$$

Виртуальные перемещения произвольны, так что равенство (13.21) должно выполняться для любых δx_2. Следовательно, выражение в квадратных скобках равно нулю.

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g. \tag{13.22}$$

Получен тот же результат, что и в предыдущей лекции с помощью уравнений Лагранжа первого рода, но в данном случае вычисление натяжения нити было не нужно. Чтобы его получить, нужно написать дифференциальное уравнение движения для каждого груза.

Чтобы студентам было легче усваивать этот материал, лектор выложил на своей страничке на сайте кафедры теоретической механики пособие из примерно 40 страниц, где данная тема разъясняется подробнее, чем это можно сделать на лекции. Также в пособии приведено множество примеров, иллюстрирующих применение общего уравнения динамики.

2. Общее уравнение статики. Принцип виртуальных перемещений

Движения в динамике могут быть очень разными. Самое простое движение — покой, достигаемый в состоянии равновесия. Бывают движения периодические, условно-периодические, хаотические, и ещё более сложные.

Получим общее уравнение статики — условие равновесия произвольной материальной системы.

Определение 51: Положение равновесия *— это такое кинематически допустимое положение системы, что если в начальный момент времени система находится в этом положении, а скорости всех точек равны нулю, то система находится в этом положении неограниченно долго.* ♣

Давайте поговорим о равновесии. Рассматривается интервал времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Предположим, что имеется положение равновесия $\vec{[h]}_\nu = \vec{[h]}_{\nu_0}$. Тогда на рассматриваемом интервале времени $\vec{v}_\nu \equiv 0$, $\vec{w}_\nu \equiv 0$. Зададимся таким вопросом: какими должны быть связи, чтобы равновесие было вообще возможно?

Сначала определим кинематически возможные положения равновесия. В этих положениях соотношения (14.1) выполняются. Кроме того, из равенства $\vec{v}_\nu \equiv 0$ и ограничений (14.2) следует, что $\vec{a}_\beta = 0, \beta = 1, \dots, s$. Или, что то же самое, $\vec{k} = \vec{0}$.

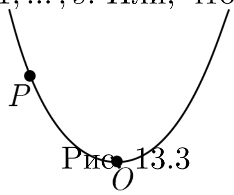


Рис. 13.3

Предположим что в момент времени t_1 скорости всех точек системы равны нулю и выполняются вышеуказанные требования. Будет ли система пребывать в равновесии, зависит от того, какие силы к ней приложены. Например, пусть в начальный момент времени санки находятся на склоне гладкой параболической ямы в точке P (рис. 13.3). Если отпустить их, то они поедут вниз. Если же санки находятся в нижней точке ямы O, то они там и останутся. И то, и другое — кинематически возможные состояния, но только второе является положением равновесия.

Теорема 21 (Принцип виртуальных перемещений) Чтобы в некотором допускаемом удерживающими идеальными связями положении равновесия система действительно пребывала бы в равновесии на интервале времени $[t_1, t_2]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого момента из этого интервала времени выполнялось соотношение

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{[h]}_\nu = 0.} \tag{13.23}$$

*

Уравнение (13.23) называется **общим уравнением статики**. Принцип виртуальных перемещений также называется **принципом Лагранжа**. В литературе также можно встретить термин «принцип возможных перемещений», но в этом случае рассматриваются только стационарные связи, когда возможные перемещения совпадают с виртуальными.

Док-во: Необходимость. Если система находится в равновесии, то все ускорения равны нулю. Подставим в общее уравнение динамики $\vec{w}_\nu = 0$, и получим искомое соотношение (13.23).

Достаточность. Предположим, что соотношение (13.23) выполняется, а также $\vec{k} = 0$. Пусть в начальный момент времени скорости всех точек равны нулю. Нужно показать, что состояние равновесия удовлетворяет уравнению движения. Уравнение движения — это (13.7), причём $\vec{[h]}$ может быть написана в виде (13.10).

$$M\vec{w} = \vec{F} + K^T\vec{P}. \tag{13.24}$$

Так как выполняется (13.23), то вектор $\vec{F}$ можно записать в виде $K^T\vec{P}_*$, где $\vec{P}_*$ — некоторый $3N$-мерный вектор, не обязательно совпадающий с $\vec{P}$. Значит,

$$M\vec{w} = K^T\left(\vec{P}_* + \vec{P}\right), \tag{13.25}$$

$$\vec{w} = M^{-1}K^T\left(\vec{P}_* + \vec{P}\right). \tag{13.26}$$

Ускорения не могут быть произвольными, они удовлетворяют соотношению (13.5). Так как $\vec{v} = \vec{0}$, то возможные ускорения определяются равенством

$$K\vec{w} = 0, \tag{13.27}$$

$$KM^{-1}K^T\left(\vec{P}_* + \vec{P}\right) = 0. \tag{13.28}$$

Матрица $KM^{-1}K^T$ — квадратная матрица размером $r+s$. Докажем, что определитель этой матрицы отличен от нуля. В противном случае система линейных уравнений $KM^{-1}K^T\vec{x} = 0$ имела бы нетривиальное решение. Тогда умножим это выражение на нетривиальный вектор $\vec{x}$:

$$KM^{-1}K^T\vec{x}\cdot\vec{x} = 0, \tag{13.29}$$

$$M^{-1}K^T\vec{x}\cdot K^T\vec{x} = 0. \tag{13.30}$$

Матрица M^{-1} диагональна, её диагональные элементы отличны от нуля. Произведение одинаковых векторов — это сумма квадратов с положительными коэффициентами. Следовательно, произведение в (13.30) может быть равно нулю только тогда, когда $\vec{x} = 0$. Получили противоречие, значит, определитель матрицы $KM^{-1}K^T$ отличен от нуля.

С учётом этого выражение (13.28) выполняется только тогда, когда $\vec{P}_* + \vec{P} = 0$. Значит, согласно формуле (13.26), $\vec{w} = 0$, что удовлетворяет уравнению движения (13.7).

В динамике действует принцип полной детерминированности Ньютона–Лапласа, состоящий в том, что по начальному положению и начальным скоростям системы полностью определяется будущее движение системы. Тогда движение, заключающееся в покое на всём интервале $[t_1, t_2]$, и является единственным решением уравнения движения. ■

Заметим, что требование однозначности решения существенно. Рассмотрим такой предостерегающий пример. Пусть точка единичной массы движется вдоль прямой, и уравнение движения $\ddot{x} = 6\sqrt[3]{x}$. При $x = 0$ работа на любых виртуальных перемещениях равна нулю, так как сама сила равна нулю, так что равенство (13.23) выполняется. Для того чтобы в точке $x = 0$ было состояние равновесия, необходимо, чтобы $\dot{x} = 0$, но этого не достаточно. Эта система допускает два решения:

1. $x \equiv 0$;
2. $x = \pm t^3$.

Второе решение обладает нулевыми первой и второй производной, но равновесием не является. О неоднозначности решения нужно помнить при применении принципа виртуальных перемещений.

Принцип виртуальных перемещений был известен людям задолго до того, как была создана теоретическая механика. Однако строго сформулирован принцип виртуальных перемещений Лагранжем в XVIII столетии.

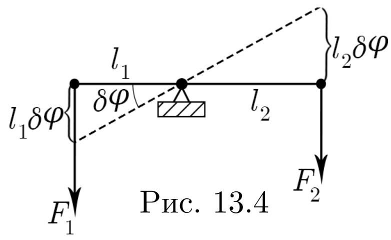


Рис. 13.4

Рассмотрим такой пример. Пусть к двум частям тонкой негнущейся планки, закреплённой в одной из точек длиной l_1 и l_2, приложены силы F_1 и F_2 (рис. 13.4). Необходимо найти, при каких условиях эта система находится в равновесии.

Придадим системе приращение угла $\delta\phi$. Тогда перемещение концов планки будет в первом приближении происходить по вертикали. Перемещение левого и будет равно $l_1\,\delta\phi$, а перемещение правого конца равно $-l_2\,\delta\phi$. Чтобы в начальном положении сохранялось равновесие, нужно применить принцип виртуальных перемещений. Согласно общему уравнению статики,

$$F_1 l_1\,\delta\phi - F_2 l_2\,\delta\phi = 0, \tag{13.31}$$

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \tag{13.32}$$

Соотношение (13.32) — это правило рычага. Оно было известно ещё в древности. Архимед говорил: «дайте мне точку опоры, и я переверну Землю». Кто-то пошутил по этому поводу: «хорошо, что такой точки не нашлось».

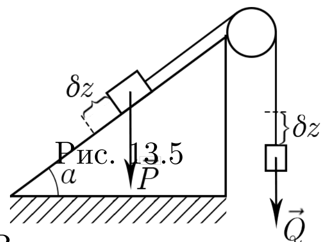


Рис. 13.5

4.1 cm

Рассмотрим ещё один пример. В пространстве закреплён гладкий невесомый блок, через который перекинута невесомая нерастяжимая нить. С одной стороны к нити прикреплён груз, лежащий на гладкой наклонной плоскости с углом подъёма α, с другой — отвесно висящий груз. Силу тяжести, действующую на первый груз, обозначим как $\vec{P}$, а силу тяжести, действующую на второй груз — как $\vec{Q}$. Необходимо узнать, при каких условиях система будет находиться в равновесии.

Применим принцип виртуальных перемещений. Придадим висящему грузу виртуальное перемещение δz по вертикали. Тогда в силу нерастяжимости нити груз на наклонной плоскости получит такое же по модулю перемещение. Тогда, согласно общему уравнению статики,

$$P\sin\alpha\,\delta z - Q\,\delta z = 0, \tag{13.33}$$

$$(P\sin\alpha - Q)\,\delta z = 0, \tag{13.34}$$

$$Q = P\sin\alpha. \tag{13.35}$$

3. Принцип виртуальных перемещений в обобщённых координатах

Пусть материальная система голономна. Введём $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — обобщённые координаты. Запишем общее уравнение статики в этих координатах, применяя понятие обобщённых сил:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \, \delta[\vec{h}]_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i = 0. \tag{13.36}$$

Поскольку все вариации обобщённых координат могут быть отличны от нуля, то критерий равновесия можно сформулировать следующим образом. *Чтобы голономная система в некотором допустимом положении находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении все обобщённые силы равнялись нулю:* $Q_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим частный случай. Пусть поле сил потенциально, потенциал $\Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_n, t)$. Тогда, как выводилось на прошлых лекциях, $Q_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i}$. Значит, критерий равновесия в этом случае формулируется так:

$$\boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.} \tag{13.37}$$

Иными словами, в равновесии все первые частные производные потенциальной энергии по обобщённым координатам должны быть равны нулю.

В частности, если система находится в поле тяжести, то потенциал $\Pi = -mgz_\text{c}$. Чтобы система находилась в равновесии, н. и д.[1], чтобы $\delta z_\text{c} = 0$. То есть центр тяжести системы должен занимать стационарное положение. Это условие носит название **принципа Торричелли**. Положение центра тяжести — это либо локальный минимум, либо локальный максимум. Положение центра тяжести может также быть безразличным, как в случае покоящегося однородного шара на горизонтальной плоскости.

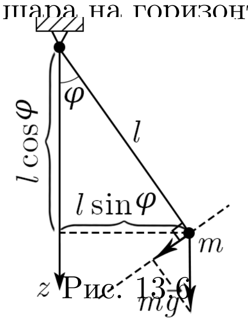


Рис. 13.6

Проиллюстрируем сказанное на простом примере. Пусть система представляет собой математический маятник, подвешенный в точке O. На невесомом нерастяжимом стержне длины l находится материальная точка массой m. Требуется найти положения маятника, в которых возможно равновесие.

Направим ось z вниз. Потенциальная энергия $\Pi = -mgz$. Примем за обобщённую координату угол поворота маятника ϕ. Тогда $\Pi = -mgl\cos\phi$. Условие равновесия: $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \phi} =$

[1] необходимо и достаточно

0, то есть $\sin\phi = 0$. В интервале углов $[0, 2\pi)$ таких значений ϕ два:

$$1). \quad \phi_1 = 0; \qquad\qquad 2). \quad \phi_2 = \pi. \tag{13.38}$$

В первом положении это висящий маятник, во втором положении — опрокинутый.

На следующей лекции будет рассматриваться общее уравнение динамики в обобщённых координатах, а также будут выводиться уравнения Лагранжа второго рода.