ЛЕКЦИЯ 14

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ В ОБОБЩЁННЫХ КООРДИНАТАХ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

1. Общее уравнение динамики в обобщённых координатах

Продолжим изучать общее уравнение динамики и получать с его помощью важные для теоретической механики выводы.

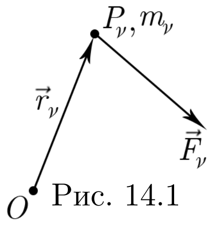

Рис. 14.1

Пусть имеется система материальных точек P_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Начало отсчёта обозначим как O, радиус-вектор точки P_ν — как $\vec{[h]}_\nu$ (рис. 14.1). $\vec{F}_\nu$ — равнодействующая активных сил, приложенная к точке с номером ν. $\delta\vec{[h]}_\nu$ — виртуальное перемещение точки P_ν в данный момент времени.

В общем случае система несвободна, у неё имеется r геометрических связей:

$$f_\alpha(\vec{[h]}_\nu, t) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, r. \tag{14.1}$$

Также у системы имеется s дифференциальных связей:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{a}_{\beta\nu} \cdot \vec{v}_\nu + a_\beta = 0, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, s. \tag{14.2}$$

На прошлой лекции было установлено, что чтобы функции $\vec{[h]}_\nu(t)$ в данный момент времени отвечали истинному движению, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение, называемое общим уравнением динамики:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{w}_\nu)\cdot\delta\vec{[h]}_\nu = 0. \tag{14.3}$$

В этом уравнении содержится вся аналитическая динамика в том объёме, который освещается в данном курсе. Запишем его в обобщённых координатах. В качестве таковых выберем величины $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Всего декартовых координат точек системы $3N$, число геометрических связей — r, следовательно, число обобщённых координат $m = 3N - r$. Выразим радиус-вектор точки $\vec{[h]}_\nu$ как функцию обобщённых координат и времени: $\vec{[h]}_\nu = \vec{[h]}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_m, t)$. В дальнейшем будем предполагать, что все эти функции дважды непрерывно дифференцируемы. Кроме того, если система склерономна, то будем выбирать обобщённые координаты так, чтобы время t явно в эти функции не входило.

Запишем скорость точки P_ν в обобщённых координатах:

$$\vec{v}_\nu = \dot{\vec{[h]}}_\nu = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial t}. \tag{14.4}$$

Из соотношения (14.4) следует, что

$$\frac{\partial\dot{\vec{[h]}}_\nu}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}. \tag{14.5}$$

Кроме того, для всех k и ν выполняется соотношение

$$\frac{\partial\dot{\vec{[h]}}_\nu}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial q_k}. \tag{14.6}$$

Проверим равенство (14.6).

$$\frac{\partial\dot{\vec{[h]}}_\nu}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\vec{[h]}_\nu}{\partial q_j\,\partial q_k}\dot{q}_j + \frac{\partial^2\vec{[h]}_\nu}{\partial t\,\partial q_k} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\vec{[h]}_\nu}{\partial q_k\,\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2\vec{[h]}_\nu}{\partial q_k\,\partial t} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial q_k}. \tag{14.7}$$

Утверждения (14.5) и (14.6) в литературе иногда называются **леммой Лагранжа**.

Запишем виртуальные перемещения через вариации обобщённых координат:

$$\delta\vec{[h]}_\nu = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{14.8}$$

Для голономной системы все вариации обобщённых координат δq_j являются независимыми. Число независимых вариаций равно числу степеней свободы.

Запишем выражение для работы активных сил в обобщённых координатах:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\cdot\delta\vec{[h]}_\nu = \sum_{j=1}^{m}Q_j\,\delta q_j. \tag{14.9}$$

Работа сил инерции в обобщённых координатах:

$$-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{w}_\nu \cdot \delta \vec{[h]}_\nu = -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\vec{[h]}}_\nu}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \vec{[h]}_\nu}{\partial q_j} \delta q_j = -\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\vec{[h]}}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{[h]}_\nu}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (14.10)$$

Видно, что величина в скобках в выражении (14.10) играет роль обобщённой силы инерции. Преобразуем этот множитель, пользуясь равенствами (14.5) и (14.6):

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\vec{[h]}}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{[h]}_\nu}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{[h]}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{[h]}_\nu}{\partial q_j} \right) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{[h]}}_\nu \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{[h]}_\nu}{\partial q_j} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{[h]}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{[h]}}_\nu}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{[h]}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{[h]}}_\nu}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Кинетическая энергия системы $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{[h]}}_\nu^2$. Её можно выразить через q, $\dot{q}$ и t, подставив в неё (14.4). Учитывая это, продолжим преобразовывать множитель:

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\vec{[h]}}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{[h]}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (14.12)$$

Подставим это выражение в (14.10):

$$-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{w}_\nu \cdot \delta \vec{[h]}_\nu = -\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (14.13)$$

Наконец, подставим выражения (14.9) и (14.13) в (14.3):

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0.} \quad (14.14)$$

Формула (14.14) — это и есть общее уравнение динамики в обобщённых координатах. Из неё можно получить дифференциальные уравнения движения в обобщённых координатах.

2. Уравнения Лагранжа второго рода

Далее будут рассматриваться только голономные системы. Для таких систем количество степеней свободы n совпадает с числом обобщённых координат m. Тогда в уравнении (14.14) суммирование производится до n; все δq_j независимы. Значит, выражение в круглых скобках должно равняться нулю при каждом j от 1 до n. Таким образом,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1, \ldots, n.} \quad (14.15)$$

Уравнения (14.15) называются **уравнениями Лагранжа второго рода**. В названии «уравнения Лагранжа второго рода» добавка «второго рода» может опускаться. Эти уравнения очень важны как в теоретической физике, так и в инженерном деле. Они удобны тем, что в них отсутствуют реакции связей, а также их количество уменьшается с уменьшением числа степеней свободы. Чтобы найти реакции, если они вдруг понадобятся, нужно решить уравнения Лагранжа и вычислить их по очевидной формуле $\vec{[h]}_\nu = m_\nu \vec{w}_\nu - \vec{F}_\nu$.

Чтобы написать уравнения Лагранжа для конкретной динамической задачи, нужно подсчитать обобщённые силы и выразить кинетическую энергию через обобщённые координаты. Уравнения Лагранжа обладают **свойством ковариантности**: можно взять другие обобщённые координаты, но процедура получения уравнений та же самая. Эта процедура довольно формальна, так что уравнения Лагранжа иногда называют **лагранжевым формализмом**.

Можно было бы рассматривать и неголономные системы, но у них вариации обобщённых координат зависимы. Из-за этой зависимости в правой части (14.15) появятся дополнительные слагаемые, в общем случае с неопределёнными множителями. Это выходит за пределы учебного плана, так что в данном курсе изучаются уравнения Лагранжа только для голономных систем.

Рассмотрим два простых примера.

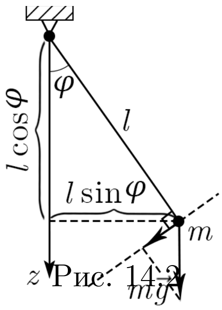

Рис. 14.2

1). Пусть система представляет собой математический маятник, подвешенный в точке O. На невесомом нерастяжимом стержне длины l находится материальная точка массой m (рис. 14.2). Ось z направлена вниз. Требуется найти положения маятника, в которых возможно равновесие.

За обобщённую координату можно принять угол отклонения маятника от вертикали ϕ. Пишем уравнение Лагранжа по этой переменной:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = Q_\phi. \tag{14.16}$$

На прошлых лекциях обобщённая сила уже была подсчитана, она вычисляется по формуле $Q_\phi = -mgl\sin\phi$. Кинетическая энергия $T = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi}, \tag{14.17}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\ddot{\phi}. \tag{14.18}$$

Так как ϕ не входит в выражение для кинетической энергии, то $\dfrac{\partial T}{\partial \phi} = 0$. Подставляем найденные величины в (14.16):

$$ml^2\ddot{\phi} = -mgl\sin\phi, \tag{14.19}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0. \tag{14.20}$$

Уравнение (14.20) — это хорошо известное уравнение движения математического маятника. Если углы ϕ малы, то вместо синуса угла можно для приближённого решения написать сам угол.

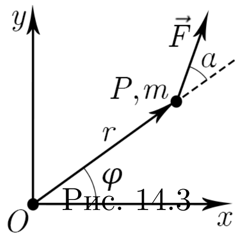

Рис. 14.3

2). Пусть в плоскости xy движется материальная точка P массой m. Положение этой точки будем задавать в полярных координатах r и ϕ. На точку P действует сила, в каждый момент времени направленная под углом $\alpha = \mathrm{const}$ к радиус-вектору точки $\vec{[}h]$. Требуется написать дифференциальные уравнения движения.

Примем за обобщённые координаты r и ϕ. Напишем уравнения Лагранжа для этой системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{[}h]} - \dfrac{\partial T}{\partial [}h] = Q_r, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \dfrac{\partial T}{\partial \phi} = Q_\phi. \end{cases} \tag{14.21}$$

1. Пусть $\delta\phi = 0$. Тогда перемещение происходит только вдоль радиус-вектора $\vec{[}h]$, а работа силы $\delta A = F\cos\alpha\,\delta r$. Значит, $Q_r = F\cos\alpha$.

2. Пусть $\delta r = 0$. Тогда перемещение происходит только по окружности радиуса r, а работа силы $\delta A = F\sin\alpha\, r\,\delta\phi$. Значит, $Q_\phi = Fr\sin\alpha$.

Кинетическая энергия $T = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{[}h]^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)$.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{[}h]} = m\dot{[}h], \tag{14.22}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{[}h]} = m\ddot{[}h]. \tag{14.23}$$

$$\frac{\partial T}{\partial [}h] = mr\dot{\phi}^2. \tag{14.24}$$

Подставим все найденные соотношения в (14.21). Первое из этих уравнений:

$$m\ddot{[}h] - mr\dot{\phi}^2 = F\cos\alpha, \tag{14.25}$$

$$m(\ddot{[}h] - r\dot{\phi}^2) = F\cos\alpha. \tag{14.26}$$

В последнем равенстве множитель в скобках — это радиальное ускорение точки в полярных координатах. Таким образом, масса, помноженная на радиальное ускорение, равна радиальной силе. Данный факт получен чисто формально.

Вычислим соответствующие величины для угла ϕ:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}, \tag{14.27}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = 2mr\dot{[}h]\dot{\phi} + mr^2\ddot{\phi}. \tag{14.28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0. \tag{14.29}$$

Второе уравнение:

$$mr(r\ddot{\phi} + 2\dot{[}h]\dot{\phi}) = Fr\sin\alpha. \tag{14.30}$$

Если $r \neq 0$, то на r в этом уравнении можно сократить. Величина, стоящая в скобках, — не что иное, как трансверсальное ускорение, направленное перпендикулярно радиус-вектору $\vec{[}h]$. Таким образом, масса, помноженная на трансверсальное ускорение, равна проекции силы на трансверсальную ось.

3. Структура кинетической энергии в обобщённых координатах

Распишем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{[}h]}_\nu^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\vec{[}h]_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{[}h]_\nu}{\partial t}\right)^2 = T_2 + T_1 + T_0, \tag{14.31}$$

где T_2 — сумма слагаемых, квадратичных по скоростям, T_1 — сумма слагаемых, линейных по скоростям, а T_0 — составляющая, не зависящая от скоростей. Выпишем их явно:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \qquad a_{jk} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial\vec{[}h]_\nu}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{[}h]_\nu}{\partial q_k}, \tag{14.32}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j\dot{q}_j, \qquad a_j = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial\vec{[}h]_\nu}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{[}h]_\nu}{\partial t}, \tag{14.33}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial\vec{[}h]_\nu}{\partial t}\right)^2. \tag{14.34}$$

Все величины a_{jk}, a_j, T_0 от обобщённых скоростей не зависят, а зависят только от обобщённых координат и времени. Если система склерономна, то $\dfrac{\partial\vec{[}h]_\nu}{\partial t} = 0$. Значит, $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, и кинетическая энергия состоит только из квадратичной части T_2, причём коэффициенты a_{jk}, не зависят от времени.

Оказывается, что для квадратичной формы, составленной из этих коэффициентов $\det \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n} \not\equiv 0$. В некоторых точках этот определитель может обратиться в ноль, тогда в окрестностях этих точек нужно выбирать другие обобщённые координаты. Преобразуем выражение (14.32) для a_{jk}:

$$a_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2. \tag{14.35}$$

Видно, что функция T_2 как минимум неотрицательна, поскольку все слагаемые неотрицательны. $T_2 = 0$ только тогда, когда для всех j $\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial \vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j = 0$. Это значит, что существует такой нетривиальный набор чисел $\dot{q}_1^*, \dot{q}_2^*, \ldots, \dot{q}_m^*$, что выполняется соотношение $\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial \vec{[h]}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j^* = 0$. Если записать это в скалярной форме, то

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j^* = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j^* = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j^* = 0. \tag{14.36}$$

Составим матрицу Якоби размером $3N \times m$, состоящую из частных производных декартовых координат по обобщённым координатам:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_m} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial q_m} \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial q_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_N}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_N}{\partial q_m} \\ \dfrac{\partial y_N}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_N}{\partial q_m} \\ \dfrac{\partial z_N}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_N}{\partial q_m} \end{pmatrix}. \tag{14.37}$$

Если выполняются равенства (14.36), то строки матрицы J линейно зависимы, то есть $\operatorname{rank} J < m$. Значит, все обобщённые координаты не являются независимыми, следовательно, предположение, что есть нетривиальный набор чисел $\dot{q}_1^*, \dot{q}_2^*, \ldots, \dot{q}_m^*$, неверно.

Итак, доказано, что $T_2 > 0$, и эта функция является положительно определённой квадратичной формой относительно скоростей. Значит, определитель этой формы, как и все главные миноры, должен быть положительным. Таким образом, доказано, что

$$\det \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n} > 0. \tag{14.38}$$

4. Разрешимость уравнений Лагранжа второго рода относительно обобщённых ускорений

Подставим разложение кинетической энергии в уравнения Лагранжа (14.15), оставив слева только слагаемые, содержащие обобщённые ускорения:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\ddot{q}_j = g_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n, \tag{14.39}$$

где функции g_j содержат все остальные члены уравнений. Они могут зависеть только от q, $\dot{q}$ и t. Слагаемые с ускорениями получаются при дифференцировании по времени функции $T_2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$. Уравнений в системе (14.39) — n штук, причём эта система линейна относительно ускорений. Известно, что матрица системы, составленная из коэффициентов a_{jk}, является положительно определённой. Следовательно, *уравнения Лагранжа второго рода разрешимы относительно обобщённых ускорений.*

Этот вывод находится в полном согласии с принципом полной детерминированности движения. Раз уравнения Лагранжа разрешимы относительно обобщённых ускорений, то их можно записать в виде

$$\ddot{q}_j = G_j(q, \dot{q}, t), \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{14.40}$$

Если функции G_j непрерывно дифференцируемы по всем аргументам, то соответствующая задача Коши имеет единственное решение.

5. Уравнения Лагранжа в случае потенциального поля сил

Пусть все силы, действующие на систему, являются потенциальными. Запишем потенциальную энергию системы в виде $\Pi = \Pi(q, \dot{q}, t)$. Как известно, в этом случае обобщённые силы вычисляются по формуле $Q_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Уравнения Лагранжа второго рода (14.15) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{14.41}$$

Введём функцию Лагранжа $L \overset{\text{def}}{=} T - \Pi$. Учитывая то, что потенциальная энергия не зависит от скоростей, уравнения Лагранжа второго рода (14.15) можно представить в виде

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, \dots, n.} \tag{14.42}$$

Функцию Лагранжа, как и кинетическую энергию, можно разложить в виде суммы квадратичных, линейных и постоянных относительно скоростей составляющих: $L = L_2 + L_1 + L_0$, где $L_2 = T_2$, $L_1 = T_1$, а $L_0 = T_0 - \Pi$. Матрица квадратичной формы L_2 совпадает

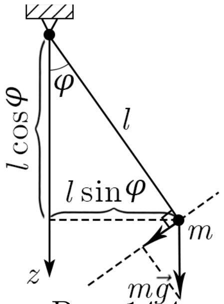

Рис. 14.4

с таковой для T_2: $\left\|\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\,\partial \dot{q}_k}\right\|_{j,k=1}^{n} = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n}$, значит, $\det\left\|\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\,\partial \dot{q}_k}\right\|_{j,k=1}^{n} > 0$.

Для иллюстрации снова рассмотрим пример с математическим маятником. Как уже было вычислено, $T = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$, $\Pi = -mgl\cos\alpha$. Функция Лагранжа $L = T - \Pi = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl\cos\alpha$. Найдём некоторые нужные производные этой функции:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi}, \tag{14.43}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\ddot{\phi}, \tag{14.44}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgl\sin\phi. \tag{14.45}$$

Если выписать соотношение (14.42) для этого маятника, получится то же уравнение, что и раньше:

$$ml^2\ddot{\phi} + mgl\sin\phi = 0, \tag{14.46}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0. \tag{14.47}$$

6. Уравнения Лагранжа второго рода в неинерциальных системах отсчёта

Выберем в неинерциальной системе отсчёта какие-то обобщённые координаты. Найдя кинетическую энергию в абсолютном движении и обобщённые силы для активных сил, можно написать уравнения Лагранжа. Легче всего показать процедуру получения этих уравнений на простом примере.

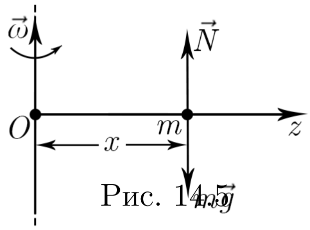

Рис. 14.5

Пусть стержень длины l в поле тяжести вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через один из концов стержня и перпендикулярной этому стержню.

Ось z направим по стержню. На стержень насажена бусина массой m. За обобщённую координату примем расстояние x до оси вращения стержня.

На точку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция стержня $\vec{N}$ (рис. 14.5). Обе силы не дают вклада в работу при перемещении по оси z, значит, $Q_x = 0$. Рассчитаем кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2}mv^2_{\text{абс}} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right). \tag{14.48}$$

Наконец, напишем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x = 0, \tag{14.49}$$

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0. \tag{14.50}$$

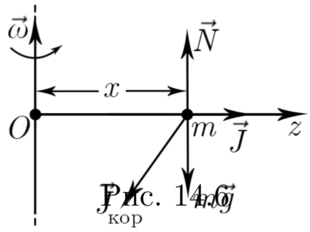

Рис. 14.6

Эти рассуждения касались абсолютной системы координат. Теперь рассмотрим неинерциальную систему отсчёта, вращающуюся вместе со стержнем, одной из осей которой является ось z. В ней действует переносная сила инерции $\vec{J} = mx\omega^2$. Кориолисова сила инерции направлена перпендикулярно плоскости рисунка 14.6, поэтому она не совершает работы.

Теперь обобщённая сила $Q_x = mx\omega^2$. Кинетическую энергию нужно считать для относительных скоростей: $T = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$. Заметим, что теперь $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$. Запишем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \tag{14.51}$$

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0. \tag{14.52}$$

Итак, получено то же самое уравнение, что и в абсолютной системе отсчёта. Лагранжев формализм автоматически даёт правильный ответ, если верно учтены силы в данной системе отсчёта. Во втором случае также можно было бы ввести потенциальную энергию переносных сил инерции $\Pi = -\dfrac{1}{2}\omega^2 x^2$ и функцию Лагранжа $L = T - \Pi$. Тогда можно было написать уравнение (14.42), и убедиться, что и в этом случае ответ точно такой же.