ЛЕКЦИЯ 16

ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЕ

1. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы

Пусть имеется n степеней свободы. $q_1, q_2, \dots, q_n$ — обобщённые координаты материальной системы. Потенциальная энергия консервативной системы есть функция обобщённых координат:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Вспомним, что положения равновесия консервативной системы находятся из условия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

— система из n уравнений и n неизвестных.

Без ограничения общности будем считать, что положением равновесия является положение

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0.$$

Этого всегда можно добиться сдвигом начала координат в точку положения равновесия.

Определение 52: устойчивости положения равновесия по Ляпунову *Положе-*

ние равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ называется ***устойчивым****, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon):$$

в любой момент времени $t \geqslant t_0$ верно:

$$\left|q_i(t)\right| < \varepsilon, \quad \left|\dot{q}_i(t)\right| < \varepsilon, \tag{16.1}$$

если в начальный момент времени $t = t_0$ выполнено

$$\left|q_i(t_0)\right| < \delta, \quad \left|\dot{q}_i(t_0)\right| < \delta. \tag{16.2}$$

♣

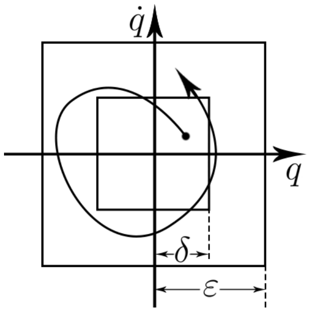

Рис. 16.1

Теорема 22 (Лагранжа (Лагранжа–Дирихле) об устойчивости положения равновесия Если в положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет **строгий** локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво. $*$

4cm

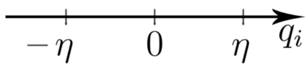

Рис. 16.2

По определению, функция $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ имеет строгий локальный минимум в точке $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$, если

$$\exists \eta > 0: \quad \forall \left|q_i\right| < \eta \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n) > \Pi(0, 0, \ldots, 0),$$

если хотя бы одна из q_i отлична от нуля.

Пример 2 Функция $(q_1 - q_2)^2$ имеет в начале координат минимум, но этот минимум не является строгим, поскольку достигается на всей прямой $q_1 = q_2$. $*$

Пример 3 Функция $q_1^2 + q_2^2$ имеет строгий минимум в начале координат. $*$

Для определённости будем считать, что

$$\Pi(0, 0, \ldots, 0) = 0$$

(потенциальную энергию всегда можно изменить на произвольную аддитивную постоянную).

Док-во: Доказательство теоремы 22:

1. Пусть потенциальная энергия $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ имеет строгий локальный минимум в начале координат. Тогда существует проколотая η-окрестность, в которой $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ положительна.

2. Кинетическая энергия системы, ввиду консервативности последней, есть квадратичная форма от обобщённых скоростей:

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k,$$

   где коэффициенты a_{ik} зависят только от обобщённых координат.

   В прошлом семестре было показано, что эта квадратичная форма положительно определена относительно обобщённых скоростей. Т. е. она всегда положительна, за исключением случая, когда все скорости равны нулю (тогда она обращается в нуль).

3. Рассмотрим полную механическую энергию системы

$$E = T + \Pi.$$

   Она, в силу указанных свойств её слагаемых, в окрестности $|q_i| < \eta$ положительно определена по всем переменным: и по координатам, и по скоростям, обращаясь в нуль только в начале координат $q_1 = \dots = q_n = \dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_n = 0$.

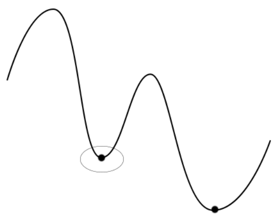

Рис. 16.3

   Кроме того, функция E непрерывна относительно своих переменных.

4. Рассмотрим ε-окрестность ($\varepsilon < \eta$) (см. Рис. 16.4).

   Граница этой окрестности — ограниченное замкнутое множество. Следовательно, функция E достигает на этой границе точной нижней грани:

$$E \geqslant a > 0 \quad \text{на границе } \varepsilon\text{-окрестности,}$$
$$\text{где } a = \inf E \quad \text{на этой границе.}$$

5. Выберем δ-окрестность такую, что $E < a$ внутри этой окрестности (рис. 16.4).

   Это можно сделать, поскольку E непрерывна и обращается в нуль в начале координат. Из любой точки таким образом выбранной δ-окрестности выпускаем траекторию. Эта траектория никогда не выйдет на границу ε-окрестности, поскольку имеется интеграл энергии:

$$E = T + \Pi = E_0 = \text{const}.$$

■

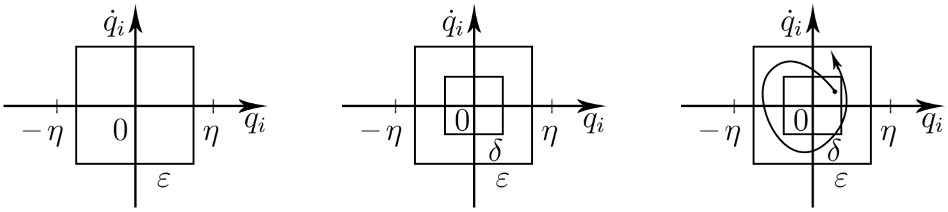

Рис. 16.4

Нужно помнить, что теорема Лагранжа является достаточным, но не необходимым условием устойчивости положения равновесия. Рассмотрим пример, демонстрирующий этот факт:

Пример 4 Пусть потенциальная энергия системы задаётся функцией

$$\Pi = \begin{cases} q^5 \sin \dfrac{1}{q}, & \text{при } q \neq 0; \\ 0, & \text{при } q = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что это дважды непрерывно-дифференцируемая функция в точке $q = 0$.

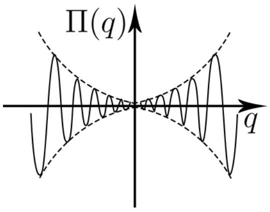

Рис. 16.5

Точка $q = 0$ — положение равновесия. Функция Π обращается в ноль в точках $q = 1/(\pi n)$. С одной стороны, положение равновесия $q = 0$ устойчиво, поскольку в любой ε-окрестности, при достаточно малой скорости, частица «сидит» в одной из счётного числа «ямок», оставаясь в ε-окрестности. С другой стороны, в точке $q = 0$, из-за счётного числа максимумов и минимумов в её окрестности, нет ни строгого локального максимума функции Π, ни строгого локального минимума. $*$

Можно привести подобный пример с бесконечно-дифференцируемой функцией:

Пример 5

$$\Pi = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{q^2}\right) \cos \dfrac{1}{q}, & \text{при } q \neq 0; \\ 0, & \text{при } q = 0. \end{cases} \qquad *$$

Ляпунов был первым, кто строго поставил задачу об обращении теоремы Лагранжа и рассматривал аналитические функции Π, что в приложениях наиболее важно.

Будем считать, что аналитическая функция Π в окрестности положения равновесия разлагается в ряд

$$\Pi = \Pi_m + \Pi_{m+1} + \dots,$$

где $m \geqslant 2$, а Π_m — однородная функция степени m относительно q. Постоянный член отсутствует, поскольку по-прежнему считаем Π в положении равновесия нулевой, а линейная часть отсутствует, поскольку это положение равновесия, следовательно, все частные производные первого порядка отсутствуют. Считаем Π_m первым ненулевым членом в разложении.

Сформулируем (без доказательства) две теоремы Ляпунова об обращении теоремы Лагранжа:

Теорема 23 (1-я теорема Ляпунова об обращении теоремы Лагранжа) Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума, и это узнаётся уже по членам второй степени разложения потенциальной энергии в ряд, то положение равновесия неустойчиво. $*$

Это значит, что $m = 2$, и Π_2 может принимать отрицательные значения в любой окрестности положения равновесия, может быть, наряду с положительными.

Пример 6 $q_1^2 - q_2^2$. $*$

Теорема 24 (2-я теорема Ляпунова об обращении теоремы Лагранжа) Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий максимум, и это узнаётся по членам наименее высокой степени в разложении потенциальной энергии в ряд, то положение равновесия неустойчиво. $*$

Это означает, что m обязательно чётное, иначе максимум не строгий, а Π_m отрицательно.

Приведём несколько примеров на исследование устойчивости.

Пример 7 (Математический маятник)

$$\Pi = -mgl\cos\varphi,$$

$$\text{положения равновесия:} \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad mgl\sin\varphi = 0,$$

$$1)\ \varphi = 0;$$

$$2)\ \varphi = \pi.$$

1) $\varphi = q$;

$$\Pi = -mgl\cos q = -mgl + \frac{1}{2}mglq^2 - \ldots$$

— устойчивость по теореме Лагранжа, т. к. точка $q = 0$ — строгий локальный минимум потенциальной энергии.

2) $\varphi = \pi + q$;

$$\Pi = mgl\cos q = mgl - \frac{1}{2}mglq^2 + \ldots$$

— неустойчивость, причём применимы обе теоремы Ляпунова. $*$

Вообще, в случае системы с одной степенью свободы:

$$\Pi = \Pi(q),$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right|_{\text{п.р.}} > 0 \text{ — устойчивость по теореме Лагранжа,}$$
$$\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right|_{\text{п.р.}} < 0 \text{ — неустойчивость по теоремам Ляпунова,}$$
$$\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right|_{\text{п.р.}} = 0 \text{ — необходимо вычисление следующих производных.}$$

В случае же большего числа степеней свободы условие знакоопределённости квадратичной формы в разложении потенциальной энергии в ряд проверяют по критерию Сильвестра.

Пример 8 Пусть задана поверхность $z = z(x, y)$:

$$z = 3x^2 + 2xy + y^2;$$

поверхность гладкая, по ней движется материальная точка веса, равного единице ($mg = 1$).

Найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

Потенциальная энергия:

$$\Pi = mgz = 3x^2 + 2xy + y^2;$$

находим положения равновесия из условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = 0; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 6x + 2y = 0; \\ 2x + 2y = 0; \end{cases}$$

— однородная система уравнений с ненулевым определителем, следовательно, решение только нулевое: $x = y = 0$.

Для исследования на устойчивость положения равновесия запишем квадратичную форму:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix};$$

поскольку $3 > 0$ и определитель положителен, по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена. Следовательно, по теореме Лагранжа, положение равновесия является устойчивым.

В этом примере положительную определённость можно было увидеть уже в самом начале:

$$\Pi = 2x^2 + (x + y)^2.$$

$*$

Пример 9 Аналогично примеру (8), но для поверхности

$$z = x^2 + xy - y^2.$$

Положением равновесия здесь также является только точка $x = y = 0$, но оно не является устойчивым по первой теореме Ляпунова об обращении теоремы Лагранжа. Действительно, на прямой $x = 0$ потенциальная энергия $\Pi = -y^2$, а на прямой $y = 0$ $\Pi = x^2$; таким образом, в любой окрестности положения равновесия функция Π может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причём это узнаётся уже по членам второй степени в разложении Π. $*$

Пример 10 (Качели) На бревне лежит доска:

Бревно неподвижно. Скольжение отсутствует. Центр масс доски C при $\varphi = 0$ находится точно над точкой A. Последнюю считаем началом координат. Исследовать, в каких случаях положение равновесия $\varphi = 0$ устойчиво.

Поскольку скольжения нет,

$$BC = \smile{AD} = R\varphi.$$

Далее, чтобы записать потенциальную энергию доски, найдём z-координату центра масс C (обозначим её z):

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC},$$
$$z = R - \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\varphi - R\varphi\sin\varphi;$$

таким образом,

$$\Pi = -mgz = -mgR\left[1 - \left(1 + \frac{h}{2R}\right)\cos\varphi - \varphi\sin\varphi\right].$$

Найдём разложение функции Π в ряд вблизи положения равновесия $\varphi = 0$:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + O_5,$$
$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 + O_6,$$
$$\Rightarrow \quad \Pi = \frac{1}{2}mgh + \frac{1}{2}mgR\left(1 - \frac{h}{2R}\right)\varphi^2 - \frac{mgR}{24}\left(3 - \frac{h}{2R}\right)\varphi^4 + O_6.$$

Окончательно:

1) $h < 2R$ — устойчивость по теореме Лагранжа;
2) $h > 2R$ — неустойчивость по обеим теоремам Ляпунова;
3) $h = 2R$ — неустойчивость по 2-й теореме Ляпунова. $*$

[h]

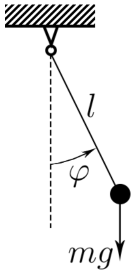

Рис. 16.6

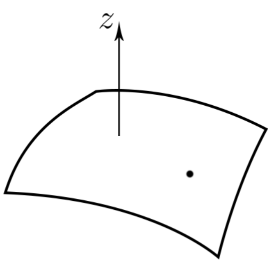

Рис. 16.7

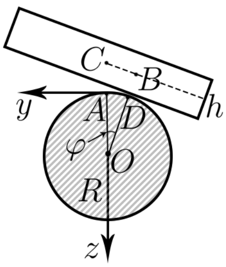

Рис. 16.8

2. Общее определение устойчивости движения

Рассмотрим материальную систему, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_m, t), \qquad i = 1, 2, \dots, m; \tag{16.3}$$

где y_i — параметры, характеризующие систему, например, скорости, координаты. Считаем, что правые части системы удовлетворяют условию существования и единственности решения, являясь достаточно гладкими функциями.

Предположим, что имеется некоторое частное решение системы

$$y_i^* = f_i(t), \tag{16.4}$$

и этому решению соответствуют начальные условия

$$y_{i0} = f_i(t_0).$$

Возникает вопрос, далеко ли уйдёт траектория от этого решения, если немного изменить начальные условия.

Определение 53: *Решение (16.4) —* ***невозмущённое движение****. Все решения, отличные от невозмущённого, будем называть возмущёнными.* ♣

Определение 54: *Величина*

$$x_i = y_i - f_i(t) \tag{16.5}$$

называется ***возмущением****.* ♣

Возмущение удовлетворяет системе

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m, t), \qquad i = 1, 2, \dots, m; \tag{16.6}$$

где

$$X_i = Y_i(x_1 + f_1, x_2 + f_2, \dots, x_m + f_m, t) - Y_i(f_1, f_2, \dots, f_m, t);$$

уравнения (16.6) — уравнения возмущённого движения, которые допускают нулевое решение:

$$x_i \equiv 0.$$

Определение 55: *Невозмущённое движение (16.4) называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon):$$

$$\forall \big|x_i(t_0)\big| < \delta \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{16.7}$$

$$\forall t \geqslant t_0 \quad \big|x_i(t)\big| < \varepsilon \qquad i = 1, 2, \dots, m. \tag{16.8}$$

♣

Определение 56: *Невозмущённое движение (16.4) называется* ***асимптотически устойчивым****, если*

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon): \\ \forall \left|x_i(t_0)\right| < \delta \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \lim_{t\to\infty} \left|x_i(t)\right| = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m.\end{gathered} \tag{16.9}$$

♣

Т. е. асимптотически устойчивое решение — устойчивое решение, для которого можно выбрать такую δ, что будет выполняться (16.9).

Рассмотрим важный частный случай линейной системы с постоянной матрицей.

3. Устойчивость нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \tag{16.10}$$

где

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{Vmatrix}, \qquad \text{а матрица } A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{m} \text{ постоянна.}$$

Будем искать решение системы (16.10) в виде

$$\vec{x} = e^{\lambda t}\vec{h}, \tag{16.11}$$

где λ — число, а $\vec{h}$ — постоянный вектор.

Подставляя (16.11) в (16.10), получим систему однородных уравнений

$$\left\|A - \lambda E\right\|\vec{h} = 0. \tag{16.12}$$

Чтобы она имела нетривиальное решение, нужно, чтобы выполнялось

$$\det\left\|A - \lambda E\right\|\vec{h} = 0 \tag{16.13}$$

— характеристическое уравнение, представляющее собой уравнение степени m.

Обозначим за λ_j его решение, а за $\vec{h}$ — соответствующий ему собственный вектор. Если матрица A приводится к диагональному виду, это происходит, когда все λ_j различны, то существует система линейно независимых векторов $\vec{h}$, и общее решение системы имеет вид

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{m} \vec{h}_j e^{\lambda_j t}. \tag{16.14}$$

В случае, когда система не приводится к диагональному виду, возникают жордановы ячейки, и общее решение системы имеет вид

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{m} \vec{g}_j e^{\lambda_j t}, \tag{16.15}$$

где g_j теперь являются полиномами от t, которые зависят от матрицы A и от кратности λ_j.

Пример 11

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2. \end{cases}$$

Общее решение такой системы имеет вид

$$\vec{x} = c_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} e^{\lambda t} + c_2 \begin{Vmatrix} t \\ 1 \end{Vmatrix} e^{\lambda t}.$$

Здесь исходная матрица A была жордановой клеткой 2-го порядка:

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix}$$

*

Утверждение 5

1. Для асимптотической устойчивости решения $\vec{x} = 0$ *линейной* системы (16.10) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части:
$$\Re\lambda_j < 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$
2. Если хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть, то решение $\vec{x} = 0$ неустойчиво.
3. Решение $\vec{x} = 0$ будет устойчивым, но не асимптотически, если характеристическое уравнение, не имея корней с положительной вещественной частью, имеет корни, вещественные части которых равны нулю, и если в этом последнем случае в жордановой форме матрицы A клетки, соответствующие этим корням, имеют первый порядок. *

Пример системы, где линейная часть не решает задачи об устойчивости:

Пример 12

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + a x_1^3; \\ \dot{x}_2 = x_1 + a x_2^3. \end{cases}$$

*