ЛЕКЦИЯ 17

КРИТЕРИЙ РАУСА-ГУРВИЦА. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Устойчивость линейной системы

Рассмотрим систему двух уравнений. Уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + ax_1^3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2^3,$$

где a — параметр. Невозмущенное движение будет в случае $x_1 = x_2 = 0$.

Пусть $a = 0$. Тогда

$$x_1(t) = x_1(0)\cos t - x_2(0)\sin t,\ \ x_2(t) = x_1(0)\sin t + x_2(0)\cos t.$$

Линейная система устойчива, так как

$$\epsilon > 0, \quad \delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}},$$

$$|x_i(t)| < \epsilon\ (i = 1, 2),\ \ t \geq 0.$$

В нелинейном уравнении домножим первое уравнение исходной системы на x_1, второе на — x_1, после чего сложим результаты:

$$\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = a(x_1^4 + x_2^4),$$

$$\frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{dt} = 2a(x_1^4 + x_2^4).$$

Производная в последнем равенстве совпадает со знаком a, поэтому
при $a > 0$ — неустойчивость,
при $a < 0$ — асимптотическая устойчивость.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \dots, \tag{17.1}$$

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{Vmatrix}.$$

Будем считать, что $A\vec{x}$ — линейная часть системы с постоянной матрицей A. Также будем считать движение установившимся, т. е. время в систему не входит. За многоточие обозначена совокупность членов выше первой степени относительно $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Характеристическое уравнение:

$$\det \|A - \lambda E\| = 0, \tag{17.2}$$

корни этого уравнения

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m.$$

Теорема 25 (Ляпунова по приближению первой степени (без доказательства)) Если все корни характеристического уравнения (17.5) имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво вне зависимости от нелинейной части. Если же среди корней уравнения (17.5) есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то движение неустойчиво. Если же уравнение (17.5) имеет корни с нулевой вещественной частью, то можно подобрать нелинейную часть так, чтобы имели место и устойчивость, и неустойчивость (критический случай). *

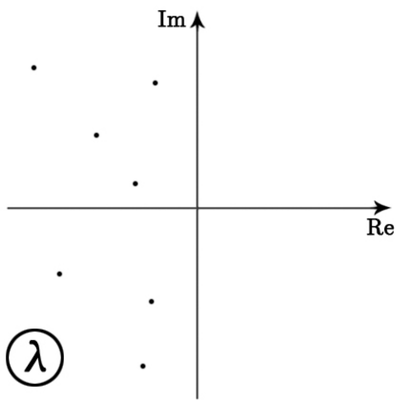

Рис. 17.1

2. Критерий Рауса–Гурвица

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_m = 0. \tag{17.3}$$

Будем считать, что $a_0 > 0$.

Необходимое условие того, что все корни уравнения (17.6) имеют отрицательные вещественные части — положительность всех коэффициентов:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} > 0.$$

Действительно, пусть

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} < 0,$$

$$\lambda_j = r \pm i\, s_j, \qquad j = 1, \dots, \frac{m-p}{2}, \qquad r_j < 0.$$

Тогда характеристический многочлен представим в виде:

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_i) \prod_{j=1}^{\frac{m\ p}{2}} \left[\lambda - r_j - i\, s_j\right] \left[\lambda - r_j + i\, s_j\right] =$$

$$= a_0 \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_i) \prod_{j=1}^{\frac{m\ p}{2}} \left[(\lambda - r_j)^2 + s_j^2\right].$$

Однако указанное условие не является достаточным, если, например, один из коэффициентов отрицателен или равен нулю. Это хорошо видно в случае $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Составим матрицу, которая называется **матрицей Гурвица**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ & \cdots\cdots & & \\ & \cdots & & a_m \end{pmatrix}$$

Главные миноры:

$$\Delta_1 = a_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\dots$$

$$\Delta_m = a_m\, \Delta_{m-1}.$$

Сформулируем **критерий Рауса–Гурвица**:

Теорема 26 (Критерий Рауса–Гурвица (без доказательства)) Для того чтобы все вещественные части корней уравнения (17.6) были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы все Δ_1, Δ_2, $\Delta_3, \dots, \Delta_m$ были положительны. *

3. Постановка задачи о малых колебаниях консервативной системы вблизи положения равновесия

Пусть система консервативная с положением равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$, которое совпадает с началом координат. Предположим, что потенциальная энергия является аналитической функцией своих переменных.

$$\varPi(q_1, \dots, q_n) = \varPi(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varPi}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \varPi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_k + \dots \tag{17.4}$$

В силу устойчивости величины q_i малы. Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

$$L = T - \varPi.$$

Кинетическая энергия является квадратичной формой относительно скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{i\,k}(q_i, \dots, q_n)\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

Здесь коэффициенты при скоростях считаются аналитическими функциями своих переменных.

$$a_{ik}(q_1, \dots, q_k) = a_{ik}(0, \dots, 0) + \dots \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(0, \dots, 0)\dot{q}_i\dot{q}_k + \dots \tag{17.5}$$

За многоточие обозначены члены, степени которых относительно скоростей и координат выше второй. Отбросим эти члены. Тогда

$$\varPi = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} c_{ik} q_i q_k, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \quad \Rightarrow \tag{17.6}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_k\,, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k.$$

$$L = T - \varPi \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\,\dot{q}_k + c_{ik}\,q_k) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{17.7}$$

Получили линейную систему уравнений. Запишем ее в матричном виде.

$$\overline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots\dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ & \dots\dots & \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A\,\ddot{\vec{q}} + C\,\vec{q} = 0. \tag{17.8}$$

3.1. Нормальные координаты и нормальные колебания

Рассмотрим две квадратичные формы:

$$(A\vec{q},\vec{q}), \quad (C\vec{q},\vec{q}).$$

Используем теорему о паре квадратичных форм

$$\vec{q} = U\vec{\theta}, \quad \vec{\theta} = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots \\ \theta_n\end{pmatrix}, \quad \det U \neq 0. \tag{17.9}$$

В новых переменных получим:

$$(A\vec{q},\vec{q}) = \sum_{j=1}^{n}\theta_j^2, \quad (C\vec{q},\vec{q}) = \sum_{j=1}^{n}\lambda\theta_j^2,$$

где все $\lambda_j > 0$ (т. к. считается, что квадратичная часть потенциальной энергии положительно определенная). Замена переменных (17.9) в общем случае не является однозначной, но величины λ_j определены однозначно и не зависят от конкретного вида преобразования.

Рассмотрим скалярное произведение

$$(A\vec{u},\vec{v}).$$

Тогда преобразование (17.9) можно записать в виде:

$$U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n),$$

$$(A\vec{u}_i,\vec{u}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases}1\,, & i=j,\\ 0\,, & i\neq j.\end{cases} \tag{17.10}$$

Таким образом, столбцы матрицы U являются ортонормированными в этой метрике. Это же условие можно записать в виде:

$$\vec{q} = \sum_{j=1}^{n}\theta_j\vec{q}_j. \tag{17.11}$$

Имеем:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\dot{\theta}_j^{\,2}, \quad \varPi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\theta_j^2, \tag{17.12}$$

где θ_j – **нормальные (главные) координаты**. Запишем уравнение Лагранжа, отвечающее такой структуре кинетической и потенциальной энергии:

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j\theta_j = 0\,, \quad \omega_j = \sqrt{\lambda_j}, \quad (j=\overline{1,n}),$$

$$\theta_j = c_j\sin(\omega_j t + \alpha_j). \tag{17.13}$$

Общее решение:

$$\vec{q} = \sum_{j=1}^{n}c_j\,\vec{u}_j\sin(\omega_j t + \alpha_j),$$

где $\vec{u}_j$ — амплитуды нормальных колебаний.

Подставим $\vec{q} = \vec{U}\sin(\omega t + \alpha)$ в (17.8):

$$\|C - \lambda\, A\|\vec{U} = 0, \tag{17.14}$$

$$\det \|C - \lambda\, A\| = 0. \tag{17.15}$$

Уравнение (17.15) называется **уравнением частот** или **вековым уравнением**.

Пример 13 Рассмотрим систему из двух грузиков массой m каждый, связанных горизонтально расположенными пружинами жесткостью k друг с другом и со стенками.

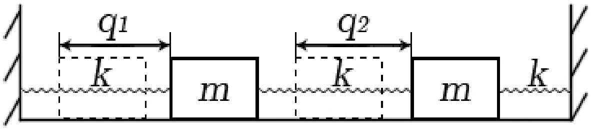

Рис. 17.2

Обозначим за q_1 смещение первого груза, а за q_2 — смещение второго груза. Тогда выражения для кинетической и потенциальной энергий в этих обобщенных координатах примут вид:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2\right), \quad A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

$$\varPi = \frac{1}{2}k\left(q_1^2 + (q_1+q_2)^2 + q_2^2\right) = k\left(q_1^2 - q_1\,q_2 + q_2\right)^2, \quad C = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения:

$$\|C - \lambda\, A\|\vec{U} = \begin{pmatrix} 2k - m\lambda & -k \\ -k & 2k - m\lambda \end{pmatrix}\vec{U} = 0,$$

$$(2k-m)^2 = k^2 \quad \Rightarrow \quad 2k - m = \pm k,$$

$$\lambda_1 = \frac{3k}{m}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}};$$

$$\lambda_2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}.$$

1. $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$k\,u_{11} - k\,u_{21} = 0,$$
$$-k\,u_{21} + k\,u_{22} = 0,$$

Компоненты вектора u_1:

$$\Rightarrow u_{21} = u_{11}, \quad \vec{u}_1 = \kappa_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\vec{u}_1 = \kappa_1 \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}.$$

Отнормируем вектор u_1:

$$(A\vec{u}_1, \vec{u}_1) = 2\kappa^2 m = 1 \quad \Rightarrow \quad \kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

2. $\lambda_1 = \frac{3k}{m}$. *

$$u_{12} = -u_{22}\,, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_1\right) + C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \alpha_2\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Если положить $C_2 = 0$, то оставшаяся часть выражения и будет представлять собой нормальное колебание (грузики будут колебаться синфазно с одинаковой амплитудой).

В случае $C_1 = 0$ колебания будут противофазными.

Если получится, что один из корней λ равен нулю, то вдоль соответствующего вектора будет происходить равномерное и прямолинейное движение (нет малых колебаний).

Если получится несколько одинаковых значений λ ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$), то в плоскости, перпендикулярной вектору u_3, будут лежать два вектора u_1 и u_2, причем не обязательно ортогональных друг другу. В этом случае можно найти линейную комбинацию этих векторов и построить ортогональную систему.

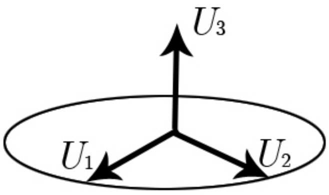

Рис. 17.3