ЛЕКЦИЯ 22

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

На прошлой лекции была начата новая тема — **канонические преобразования**. Напомним некоторые уравнения и понятия, которые там вводились.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений в форме уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{22.1}$$

Функция Гамильтона этой системы $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$. Это $2n$ уравнений первого порядка. Их можно записать в векторно-матричной форме. Введём $2n$-мерный вектор $\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$. Тогда $H = H(\vec{x}, t)$. Введём матрицу $J \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ и строку $H_x \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial H}{\partial q_n} & \dfrac{\partial H}{\partial p_1} & \dots & \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \end{pmatrix}$. Матрица J обладает следующими свойствами:

1. $J^T = J^{-1} = -J$;
2. $J^2 = -E_{2n}$;
3. $\det J = 1$.

С учётом введённых обозначений систему уравнений Гамильтона (23.1) можно переписать так:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = J H_x^T, \tag{22.2}$$

Перейдём в фазовом пространстве q, p к новым переменным:

$$Q_i = Q_i\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right), \qquad P_i = P_i\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{22.3}$$

Будем предполагать, что эта замена переменных обратима, а все функции Q_i и P_i дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. Соотношения (23.3) тоже можно записать в векторной форме. Введём обозначение $\vec{y} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{Q} \\ \vec{P} \end{pmatrix}$. Тогда замена переменных имеет вид

$$\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}, t). \tag{22.4}$$

Составим матрицу

$$M = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} \\ \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}. \tag{22.5}$$

Тогда обратимость замены переменных эквивалентна равенству $\det M \neq 0$. Обратное преобразование будет иметь вид

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{y}, t). \tag{22.6}$$

При этом матрица обратной замены будет равна

$$M^{-1} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}}. \tag{22.7}$$

Получим уравнения движения в новых переменных.

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial \vec{y}}{\partial t} = MJH_x^T + \frac{\partial \vec{y}}{\partial t}. \tag{22.8}$$

Чтобы получить $\dfrac{\partial \vec{y}}{\partial t}$, нужно взять частную производную выражения (23.4) по времени, а затем в полученном выражении заменить величину $\vec{x}$ по формуле (23.6). Тогда $\dfrac{\partial \vec{y}}{\partial t}$ будет функцией от $\vec{y}$.

Обозначим через Φ исходную функцию H, вычисленную в новых переменных:

$$\Phi(\vec{y}, t) \overset{\text{def}}{=} H(\vec{x}(\vec{y}, t), t). \tag{22.9}$$

$$H_x^T = \left(\Phi_y \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}\right)^T = M^T \Phi_y^T. \tag{22.10}$$

Таким образом, уравнения движения в новых переменных будут иметь вид

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = MJM^T\Phi_y^T + \frac{\partial \vec{y}}{\partial t}. \tag{22.11}$$

Лемма 2 Для того чтобы матрица $\left(J\dfrac{\partial \vec{y}}{\partial t}\right)_y$ была симметрической, необходимо и достаточно, чтобы матрица M^TJM явно не зависела от t. *

Док-во: Преобразуем матрицу $\left(J\,\dfrac{\partial\vec{y}}{\partial t}\right)_y$:

$$\left(J\,\frac{\partial\vec{y}}{\partial t}\right)_y = J\,\frac{\partial}{\partial\vec{y}}\left(\frac{\partial\vec{y}}{\partial t}\right) = J\,\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\left(\frac{\partial\vec{y}}{\partial t}\right)\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}. \tag{22.12}$$

Так как функция $\vec{y}$ дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам, то в последней формуле можно поменять порядок дифференцирования.

$$\left(J\,\frac{\partial\vec{y}}{\partial t}\right)_y = J\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{x}}\right)M^{-1} = J\,\frac{\partial M}{\partial t}M^{-1}. \tag{22.13}$$

Запишем условие симметричности матрицы $\left(J\,\dfrac{\partial\vec{y}}{\partial t}\right)_y$:

$$\left(J\,\frac{\partial M}{\partial t}M^{-1}\right)^T = J\,\frac{\partial M}{\partial t}M^{-1}. \tag{22.14}$$

Преобразуем выражение (22.14):

$$\left(J\,\frac{\partial M}{\partial t}M^{-1}\right)^T = \left(M^{-1}\right)^T\frac{\partial M^T}{\partial t}J^T = -\left(M^T\right)^{-1}\frac{\partial M^T}{\partial t}J. \tag{22.15}$$

Таким образом, равенство (22.14) можно переписать так:

$$\left(M^T\right)^{-1}\frac{\partial M^T}{\partial t}J = -J\,\frac{\partial M}{\partial t}M^{-1}. \tag{22.16}$$

Умножим обе части этой формулы слева на M^T, а справа — на M. Получим

$$\frac{\partial M^T}{\partial t}JM = -M^TJ\,\frac{\partial M}{\partial t}, \tag{22.17}$$

$$\frac{\partial\left(M^TJM\right)}{\partial t} = 0. \tag{22.18}$$

Таким образом, равенство (22.14) эквивалентно тому, что матрица M^TJM не зависит от времени. Следовательно, утверждение леммы верно. ■

Теперь вспомним факт из курса математического анализа, который пригодится в дальнейшем. Рассмотрим дифференциальную форму $\vec{a}\cdot d\vec{x}$, где $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1(x_1,\dots,x_m) \\ \dots \\ a_m(x_1,\dots,x_m)\end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m\end{pmatrix}$.

$$\vec{a}\cdot d\vec{x} = a_1dx_1 + \dots + a_mdx_m. \tag{22.19}$$

Из курса математического анализа известно, что чтобы выражение (22.19) было полным дифференциалом, нужно, чтобы

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}. \tag{22.20}$$

Или, что эквивалентно, матрица $\dfrac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}}$ должна быть симметрической. Этот факт понадобится в дальнейшем повествовании.

Итак, уравнения (22.11) в новых переменных не обязательно имеют гамильтонову форму. Их не всегда можно записать в виде

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial P_i}, \qquad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_i}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{22.21}$$

где $\Gamma = \Gamma(\vec{y}, t)$ играет роль функции Гамильтона. Или, в матричном виде,

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = J\Gamma_y^T. \tag{22.22}$$

Но далее речь будет идти только о таких преобразованиях, которые сохраняют гамильтонову форму уравнений. Изучение таких преобразований и является целью данного раздела курса.

Определение 60: *Преобразование* (23.4) *называется* ***каноническим****, если оно любую гамильтонову систему переводит в гамильтонову, возможно, с другой функцией Гамильтона* Γ. ♣

Заметим, что если некое преобразование переводит конкретную гамильтонову систему в гамильтонову же, то это ещё не означает, что оно каноническое. Например, если исходная функция Гамильтона $H = 0$, то любая невырожденная не зависящая от времени замена переменных переводит исходную систему в гамильтонову систему с нулевой функцией Гамильтона. Но не все такие замены переменных являются каноническими.

Понятие канонических преобразований лежит в основе аппарата, который позволяет упрощать уравнения движения с сохранением их гамильтоновой формы. Эти преобразования появились из математики, там они назывались касательными преобразованиями.

После введения понятия канонических преобразований возникают два важных вопроса.

1. Как установить, является ли данное конкретное преобразование каноническим?

2. Если преобразование является каноническим, какой будет новая функция Гамильтона?

На этой лекции будет рассмотрен первый из этих вопросов.

Теорема 30 Для того, чтобы преобразование (23.4) являлось каноническим, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $c \neq 0$ такое, что

$$\boxed{M^T J M = cJ.} \tag{22.23}$$

*

Число c называется **валентностью** преобразования. Если $c = 1$, то преобразование называется **унивалентным**. Чаще всего в литературе и теоретической физике используются унивалентные преобразования. Но, как следует из теоремы, класс канонических преобразований более широк. Чаще всего изменением масштаба по координатам удаётся сделать константу c равной единице.

Матрица M, удовлетворяющая соотношению (23.8), называется **обобщённо-симплектической**. Если при этом $c = 1$, то она называется **симплектической**. Возьмём определитель от обеих частей равенства (23.8):

$$(\det M)^2 = c^{2n} \quad \Rightarrow \quad \det M = \pm c^n. \tag{22.24}$$

Таким образом, обобщённо-симплектическая матрица является невырожденной. Умножим обе части равенства (23.8) слева на $\left(M^T\right)^{-1}$, а справа — на M^{-1}. Тогда

$$J = c\left(M^T\right)^{-1} JM^{-1}. \tag{22.25}$$

Вычислим обратную матрицу от обеих частей равенства (22.25):

$$-J = \frac{1}{c} MJM^T, \tag{22.26}$$

$$\boxed{MJM^T = cJ.} \tag{22.27}$$

Выражения (23.8) и (23.9) эквивалентны.

Теперь докажем сформулированную теорему.

Док-во: 1). Достаточность. Пусть существует такое число c, что выполняется условие (23.8) (или (23.9)). Найдём вид преобразованной системы уравнений:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = Jc\,\Phi_y^T + \frac{\partial \vec{y}}{\partial t}. \tag{22.28}$$

Матрица MJM^T не зависит от времени, значит, согласно лемме, матрица $\left(J\dfrac{\partial \vec{y}}{\partial t}\right)_y$ является симметрической. Это значит, что $J\dfrac{\partial \vec{y}}{\partial t} = -R_y^T$, где R — некоторая функция. Стало быть,

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial t} = JR_y^T. \tag{22.29}$$

С учётом этого уравнения (22.28) запишутся в виде

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = Jc\,\Phi_y^T + JR_y^T = J\left(c\Phi + R\right)_y^T. \tag{22.30}$$

Из выражения (22.30) видно, что преобразованные уравнения имеют вид уравнений Гамильтона, а новая функция Гамильтона $\Gamma = c\Phi + R$, значит, достаточность доказана. Φ — это старая функция Гамильтона, выраженная через новые переменные, а R находится из соотношения (22.29) по известным в математической физике алгоритмам.

Обратим внимание, что новая функция Гамильтона зависит от валентности преобразования, а функция R возникла из-за того, что преобразование зависело явно от времени. Ни валентность, ни функция R не зависят от исходной функции Гамильтона.

2). Необходимость Пусть преобразование (23.4) переводит любую гамильтонову систему в гамильтонову. При любой исходной функции Гамильтона уравнения (22.11) имеют форму Гамильтона. Докажем, что выполняется условие (23.8) (или (23.9)).

Пусть $\Phi = 0$. Тогда частная производная $\dfrac{\partial \vec{y}}{\partial t}$ может быть записана в виде (22.29). Уравнения должны иметь структуру (22.22), значит, матрица $\left(J\dfrac{\partial \vec{y}}{\partial t}\right)_y$ является симметрической. Следовательно, согласно лемме, матрица M^TJM не зависит явно от времени. Чтобы преобразованные уравнения имели форму (22.22), нужно, чтобы первое слагаемое в (22.11) тоже было представимо в вышеупомянутом виде:

$$MJM^T\Phi_y^T = JG_y^T, \tag{22.31}$$

$$-JMJM^T\Phi_y^T = G_y^T. \tag{22.32}$$

Введём матрицу $A \overset{\text{def}}{=} -JMJM^T = \|a_{kl}\|_{k,l=1}^{2n}$. Она не зависит явно от времени. Теперь (22.32) записывается в виде $A\Phi_y^T = G_y^T$.

$$\frac{\partial G}{\partial y_k} = \sum_{r=1}^{2n} a_{kr}\frac{\partial \Phi}{\partial y_r}, \qquad \frac{\partial G}{\partial y_l} = \sum_{r=1}^{2n} a_{lr}\frac{\partial \Phi}{\partial y_r}. \tag{22.33}$$

Перекрёстные производные должны быть равны:

$$\frac{\partial}{\partial y_l}\left(\sum_{r=1}^{2n} a_{kr}\frac{\partial \Phi}{\partial y_r}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{r=1}^{2n} a_{lr}\frac{\partial \Phi}{\partial y_r}\right). \tag{22.34}$$

Это условие интегрируемости, и оно должно выполняться при любой функции Φ. Пусть Φ зависит только от y_k. Тогда равенство (22.34) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial y_l}\left(a_{kk}\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{lk}\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}\right), \tag{22.35}$$

$$\frac{\partial a_{kk}}{\partial y_l}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} + a_{kk}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k\,\partial y_l} = \frac{\partial a_{lk}}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} + a_{lk}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k^2}. \tag{22.36}$$

Предположим, что $k \neq l$. Тогда $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k\,\partial y_l} = 0$, и получаем, что

$$\left(\frac{\partial a_{kk}}{\partial y_l} - \frac{\partial a_{lk}}{\partial y_k}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = a_{lk}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k^2}. \tag{22.37}$$

Слева стоит первая производная от Φ, а справа — вторая производная. Чтобы равенство (22.37) выполнялось для любой функции $\Phi(y_k)$, необходимо, чтобы $a_{lk} = 0$. Тогда из того же равенства следует, что $\dfrac{\partial a_{kk}}{\partial y_k} = 0$. Итак, установлено, что в матрице A недиагональные элементы равны нулю, а диагональные элементы a_{kk} зависят только от y_k.

Теперь перейдём к равенству (22.35), снова полагая, что функция Φ произвольна. Перепишем его с учётом вышесказанного:

$$a_{kk}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k\,\partial y_l} = a_{ll}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_l\,\partial y_k}. \tag{22.38}$$

Так как функция Φ дважды непрерывно дифференцируема, то $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k\,\partial y_l} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y_l\,\partial y_k}$. Значит, $a_{kk} = a_{ll}$. Это может выполняться, только если все диагональные элементы равны одной и той же константе. Обозначим её как c. Теперь матрица A имеет вид $A = cE_{2n}$. Константа c не может равняться нулю, иначе определитель матрицы A равнялся бы нулю.

Итак, получено следующее утверждение:

$$-JMJM^T = A = cE_{2n}, \tag{22.39}$$

$$MJM^T = cJ. \tag{22.40}$$

Это не что иное, как равенство (23.9), эквивалентное равенству (23.8). Значит, необходимость тоже доказана. ■

Доказанная теорема даёт удобный способ для проверки, является ли определённое преобразование каноническим. Для этого нужно вычислить матрицу M и проверить условие (23.8).

Сформулируем несколько утверждений, эквивалентных данному на этой лекции определению канонических преобразований. Их тоже можно будет использовать как определение таких преобразований. В силу очевидной простоты доказательства некоторых из них не приводятся.

Запишем условие каноничности через скобки Лагранжа. Напомним определение этого понятия. Рассматривались $2n$ функций от переменных x, y: ϕ_j и Ψ_j, $j = 1, \dots, n$. Скобкой Лагранжа этих функций называется величина

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right). \tag{22.41}$$

Примем Q_j из замены переменных (23.3) за ϕ_j, а P_j — за Ψ_j. Тогда равенство (23.8) преобразуется в

$$M^T J M = \begin{pmatrix} \|[q_i, q_k]\|_{i,k=1}^{n} & \|[q_i, p_k]\|_{i,k=1}^{n} \\ -\|[q_i, p_k]\|_{i,k=1}^{n} & \|[p_i, p_k]\|_{i,k=1}^{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{22.42}$$

Таким образом, необходимое и достаточное каноничности преобразования (23.3) записывается в виде

$$[q_i, q_k] = 0, \qquad [p_i, p_k] = 0, \qquad [q_i, p_k] = c\delta_{ik}, \qquad i, k = 1, \dots, n. \tag{22.43}$$

Теперь запишем условие каноничности через скобки Пуассона. Преобразуем соотношение (23.9):

$$M J M^T = \begin{pmatrix} \|(Q_i, Q_k)\|_{i,k=1}^{n} & \|(Q_i, P_k)\|_{i,k=1}^{n} \\ -\|(Q_i, P_k)\|_{i,k=1}^{n} & \|(P_i, P_k)\|_{i,k=1}^{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{22.44}$$

С учётом этого необходимое и достаточное каноничности преобразования (23.4) записывается в виде

$$(Q_i, Q_k) = 0, \qquad (P_i, P_k) = 0, \qquad (Q_i, P_k) = c\delta_{ik}, \qquad i, k = 1, \dots, n. \tag{22.45}$$

Утверждения (22.43) и (22.45) можно было бы принять за определение канонических преобразований. Тогда можно было бы получить и критерии (23.8) и (23.9).

Ещё один важный критерий каноничности преобразования записывается через дифференциальную форму.

Утверждение 6 Для каноничности преобразования (23.4) необходимо и достаточно, чтобы существовало число $c \neq 0$ такое, что выражение

$$c \sum_{k=1}^{n} p_k \, \delta q_k - \sum_{k=1}^{n} P_k \, \delta Q_k \tag{22.46}$$

является полным дифференциалом некой функции $F(q, p, t)$. Причём дифференциал берётся только по q и p, а t считается параметром. *

В технической литературе часто число c опускают, полагая его равным единице.

Док-во: Выразим δQ_k через дифференциалы исходных переменных:

$$\delta Q_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \delta p_i \right). \tag{22.47}$$

Запишем выражение (22.46) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X_i \, \delta q_i + Y_i \, \delta p_i \right), \tag{22.48}$$

где $X_i = cp_i - \sum\limits_{l=1}^{n} P_l \dfrac{\partial Q_l}{\partial q_i}$, $Y_i = -\sum\limits_{l=1}^{n} P_l \dfrac{\partial Q_l}{\partial p_i}$.

Выражение (22.48) является полным дифференциалом, если перекрёстные производные одинаковы:

$$\frac{\partial X_i}{\partial q_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial q_i}. \tag{22.49}$$

Оказывается, что эти три условия эквиваленты трём равенствам в критерии через скобки Лагранжа (можно проверить это в качестве упражнения):

$$[q_i, q_k] = 0, \qquad [p_i, p_k] = 0, \qquad [q_i, p_k] = c\delta_{ik}, \qquad i, k = 1, \ldots, n. \tag{22.50}$$

■

Более подробно о канонических преобразований написано на страничке лектора на сайте кафедры теоретической механики.

Приведём пять примеров канонических преобразований. В них будем исходную функцию Гамильтона как $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$, а преобразованную — как $\Gamma = \Gamma(\vec{Q}, \vec{P}, t)$.

1. Рассмотрим тождественную замену переменных: $Q_j = q_j$, $P_j = p_j$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда тривиальным образом $\Gamma = H(\vec{Q}, \vec{P}, t)$. Итак, тождественное преобразование является каноническим.

2. Поменяем ролями координаты и импульсы: $Q_j = p_j$, $P_j = q_j$, $j = 1, \ldots, n$. Это преобразование тоже каноническое, его валентность равна -1. Новая функция Гамильтона $\Gamma = -H(\vec{P}, \vec{Q}, t)$.

3. Изменим масштаб по координатам и импульсам: $Q_j = \alpha q_j$, $P_j = \beta p_j$, $j = 1, \ldots, n$. Это преобразование — каноническое с валентностью $c = \alpha\beta$. Новая функция Гамильтона $\Gamma = \alpha\beta \, H\left(\dfrac{\vec{Q}}{\alpha}, \dfrac{\vec{P}}{\beta}, t \right)$.

4. Пусть система представляет собой одномерный осциллятор с функцией Гамильтона $H = \dfrac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$. Выразим старые переменные через новые следующим образом:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \sin Q, \qquad p = \sqrt{2\omega P} \cos Q. \tag{22.51}$$

Оказывается, что это унивалентное каноническое преобразование. Новая функция Гамильтона $\Gamma = \omega P$. Такую замену придумал Пуанкаре, изучая небесную механику.

5. Пусть $H = \frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right)$. Совершим замену переменных $Q = q\cos t - p\sin t$, $q\sin t + p\cos t$. Это преобразование является каноническим унивалентным преобразованием. Итоговая функция Гамильтона $\Gamma = 0$.

Последние два примера показывают, что канонические преобразования иногда позволяют значительно упростить систему уравнений Гамильтона. Их интегрирование после применения преобразования иногда становится тривиальным.