# ЛЕКЦИЯ 23

# КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ О СОХРАНЕНИИ ФАЗОВОГО ОБЪЁМА. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ СВОБОДНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Продолжим изучать канонические преобразования. Сначала напомним основные определения и формулы.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений в форме уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{23.1}$$

Функция Гамильтона этой системы $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$. Это $2n$ уравнений первого порядка. Их удобно записывать в векторно-матричной форме. Введём $2n$-мерный вектор $\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$. Тогда $H = H(\vec{x}, t)$. Введём матрицу $J \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ и строку $H_x \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial H}{\partial q_n} & \dfrac{\partial H}{\partial p_1} & \dots & \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \end{pmatrix}$.

С учётом введённых обозначений систему уравнений Гамильтона (23.1) можно переписать так:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = J H_x^T, \tag{23.2}$$

Перейдём в фазовом пространстве $q$, $p$ к новым переменным:

$$Q_i = Q_i\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right), \qquad P_i = P_i\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{23.3}$$

Будем предполагать, что эта замена переменных обратима, а все функции $Q_i$ и $P_i$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. Соотношения (23.3) тоже можно записать в векторной форме. Введём обозначение $\vec{y} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{Q} \\ \vec{P} \end{pmatrix}$. Тогда замена переменных будет иметь вид

$$\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}, t). \tag{23.4}$$

Составим матрицу

$$M = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & \dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} \\ \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \end{pmatrix}. \tag{23.5}$$

Тогда обратимость замены переменных эквивалентна равенству $\det M \neq 0$. Обратное преобразование будет иметь вид

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{y}, t). \tag{23.6}$$

При этом матрица обратной замены будет равна

$$M^{-1} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}}. \tag{23.7}$$

На прошлой лекции было дано несколько критериев каноничности преобразования. Один из них формулируется так: *для того, чтобы замена переменных* (23.4) *была канонической, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $c \neq 0$ такое, что*

$$M^T J M = cJ, \tag{23.8}$$

или, что эквивалентно,

$$M J M^T = cJ. \tag{23.9}$$

Ещё три критерия каноничности были сформулированы через скобки Лагранжа, скобки Пуассона и дифференциальную форму.

**Утверждение 7** Пусть имеется два канонических преобразования $\vec{y}_1 = \vec{y}_1(\vec{x}, t)$, $\vec{y}_2 = \vec{y}_2(\vec{y}_1, t)$. Если применить их последовательно, то результирующее преобразование $\vec{y} = \vec{y}_2(\vec{y}_1(\vec{x}, t), t)$ тоже будет каноническим. Причём, если валентность первого преобразования равна $c_1$, второго — $c_2$, то валентность результирующего преобразования равна $c_1 c_2$. *

**Док-во:** Посчитаем матрицу $M$ итогового преобразования:

$$M = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{y}_2}{\partial \vec{y}_1} \cdot \frac{\partial \vec{y}_1}{\partial \vec{x}} = M_2 M_1. \tag{23.10}$$

Убедимся, что критерий каноничности (23.8) для $M$ выполняется, пользуясь тем, что преобразования $\vec{y}_1$ и $\vec{y}_2$ канонические:

$$(M_2 M_1)^T J M_2 M_1 = M_1^T \left( M_2^T J M_2 \right) M_1 = M_1^T (c_2 J) M_1 = c_2 M_1^T J M_1 = c_1 c_2 J. \tag{23.11}$$

Из последнего равенства также следует, что валентность результирующего преобразования равна $c_1 c_2$. ■

**Утверждение 8** Если преобразование (23.4) является каноническим с валентностью $c$, то и обратное преобразование (23.6) также каноническое, причём его валентность равна $\dfrac{1}{c}$. *

**Док-во:** Для прямого преобразования выполняется критерий каноничности (23.8). Умножим это равенство слева на $\left(M^T\right)^{-1}$, а справа — на $M^{-1}$:

$$J = c\left(M^T\right)^{-1} JM^{-1} = c\left(M^{-1}\right)^T JM^{-1}, \tag{23.12}$$

$$\left(M^{-1}\right)^T JM^{-1} = \frac{1}{c}J. \tag{23.13}$$

Матрица обратного преобразования — это $\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} = M^{-1}$. Она удовлетворяет соотношению (23.13), которое является для неё критерием каноничности. Из этой формулы также видно, что валентность обратного преобразования равна $\dfrac{1}{c}$. ■

# 1. Инвариантность скобок Пуассона при унивалентных канонических преобразованиях

Рассмотрим ещё одно важное свойство скобок Пуассона. Пусть имеются функции $u(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$, $v(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$, или $u(\vec{x}, t)$, $v(\vec{x}, t)$ в матричных обозначениях. Скобкой Пуассона этих двух функций называется величина

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} \right). \tag{23.14}$$

Скобку Пуассона можно кратко записать в матричном виде:

$$(u, v) = \frac{\partial u}{\partial \vec{x}} J \left(\frac{\partial v}{\partial \vec{x}}\right)^T. \tag{23.15}$$

Совершим каноническое преобразование (23.4). Выразим в новых переменных $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y})$ и подставим это в выражения для функций $u$ и $v$. После этого функция $u$ переходит в функцию $U$, а функция $v$ — в функцию $V$. $U$ и $V$ равны старым функциям, но записаны через новые переменные $\vec{y}$. Найдём скобку Пуассона от $U$ и $V$:

$$(U, V) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial U}{\partial Q_i}\frac{\partial V}{\partial P_i} - \frac{\partial U}{\partial P_i}\frac{\partial V}{\partial Q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial \vec{y}} J \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{y}}\right)^T. \tag{23.16}$$

**Утверждение 9 (Свойство инвариантности скобок Пуассона)**

$$(u, v) = c\,(U, V). \tag{23.17}$$

*

В частности, если преобразование унивалентно, то скобка Пуассона при преобразовании не меняется.

**Док-во:** Преобразуем выражение (23.15):

$$(u,v)=\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}J\left(\frac{\partial v}{\partial \vec{x}}\right)^T=\frac{\partial U}{\partial \vec{y}}\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}J\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{y}}\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}\right)^T=\frac{\partial U}{\partial \vec{y}}MJ\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{y}}M\right)^T=\frac{\partial U}{\partial \vec{y}}MJM^T\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{y}}\right)^T. \tag{23.18}$$

Согласно равенству (23.9), $MJM^T=cJ$. Значит,

$$(u,v)=c\,\frac{\partial U}{\partial \vec{y}}J\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{y}}\right)^T=c\,(U,V). \tag{23.19}$$

■

# 2. Канонические преобразования и процесс движения

Обозначим как $\vec{x}_0$ начальные значения переменных $q$ и $p$. Решение уравнений (23.2) можно записать так:

$$\vec{x}=\vec{x}(\vec{x}_0,t). \tag{23.20}$$

**Утверждение 10** Движение гамильтоновой системы задаёт унивалентное каноническое преобразование $\vec{x}_0\to\vec{x}$. *

**Док-во:** Если подставить решение (23.20) в уравнения Гамильтона (23.2), получится тождество. Продифференцируем его по начальному условию $\vec{x}_0$, меняя порядок дифференцирования:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0}=JH_{xx}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0}. \tag{23.21}$$

Значит, матрица преобразования $M=\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0}$ удовлетворяет такому уравнению:

$$\frac{dM}{dt}=JH_{xx}M. \tag{23.22}$$

Транспонируем обе части равенства (23.22):

$$\frac{dM^T}{dt}=M^TH_{xx}J^T=-M^TH_{xx}J. \tag{23.23}$$

Вычислим выражение $\dfrac{d\left(M^TJM\right)}{dt}$, попутно подставляя в него формулы (23.22) и (23.23) и пользуясь тем, что $J\cdot J=-E_{2n}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(M^TJM\right)}{dt}&=\frac{dM^T}{dt}JM+M^TJ\frac{dM}{dt}=-M^TH_{xx}JJM+M^TJJH_{xx}M=\\&=M^TH_{xx}M-M^TH_{xx}M=0.\end{aligned} \tag{23.24}$$

Таким образом, на траекториях, задаваемых уравнениями Гамильтона, матрица $M^TJM$ постоянна. В момент времени, совпадающий с начальным, $M=E$, и

$$M^TJM=J. \tag{23.25}$$

Эта матрица удовлетворяет критерию каноничности (23.8) при $c=1$. Значит, в любой другой момент времени условие каноничности тоже будет выполняться. ■

Из соотношения (23.25) следует, что $(\det M)^2=1$. Матрица $M$ непрерывно меняется с течением времени, а в начальный момент времени $M=E$. Значит, $\det M=1$.

# 3. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма

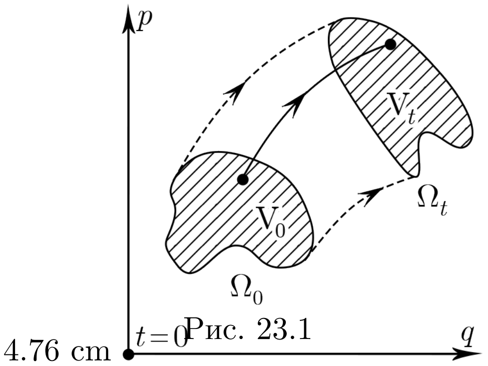


Рис. 23.1

Введём $2n$-мерное фазовое пространство $q, p$ и выделим в нём в момент времени $t_0$ некоторое множество $\Omega_0$. Можно считать его множеством начальных условий. Объём этого множества равен

$$V_0 = \underset{\Omega_0}{\int \cdots \int} dq_{10} \ldots dq_{n0}\, dp_{10} \ldots dp_{n0}. \tag{23.26}$$

Из каждой точки $x_0$ множества $\Omega_0$ проведём траекторию, соответствующую движению системы при начальных условиях $x_0$. В момент времени $t$ по этим траекториям множество $\Omega_0$ переходит во множество $\Omega_t$. Объём этого множества равен

$$V_t = \underset{\Omega_t}{\int \cdots \int} dq_1 \ldots dq_n\, dp_1 \ldots dp_n. \tag{23.27}$$

**Теорема 31 (Теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма)** В любой момент времени $t$

$$V_t = V_0. \tag{23.28}$$

*

**Док-во:** Перейдём по формуле (23.20) от переменных $\vec{x}$ к переменным $\vec{x}_0$. Тогда объём множества $\Omega_t$ запишется в виде

$$V_t = \underset{\Omega_0}{\int \cdots \int} |\det M|\, dq_{10} \ldots dq_{n0}\, dp_{10} \ldots dp_{n0} = \underset{\Omega_0}{\int \cdots \int} dq_{10} \ldots dq_{n0}\, dp_{10} \ldots dp_{n0} = V_0.$$

(23.29)

■

Эта фундаментальная теорема находит широкое применение в физике. Из вышеизложенного видно, что она является простым следствием гамильтоновой механики.

**Утверждение 11** В гамильтоновых системах невозможна асимптотическая устойчивость.

*

Это утверждение следует из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объёма. Для асимптотической устойчивости необходимо, чтобы с течением времени все траектории в некоторой окрестности невозмущённой траектории стягивались в одну. В гамильтоновых системах это невозможно, так как фазовый объём сохраняется. Значит, задачи об устойчивости в гамильтоновых системах почти всегда принадлежат к критическим случаям.

# 4. Свободное каноническое преобразование и его производящая функция

После введения понятия канонических преобразований возникают два важных вопроса.

1. Как установить, является ли данное конкретное преобразование каноническим?
2. Если преобразование является каноническим, какой будет новая функция Гамильтона?

Приступим к изучению второго из этих вопросов.
Пусть имеется каноническое преобразование

$$Q_i = Q_i\,(\vec{q}, \vec{p}, t)\,, \qquad P_i = P_i\,(\vec{q}, \vec{p}, t)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{23.30}$$

Тогда существует число $c$ такое, что

$$c \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\,\delta Q_i = \delta F(\vec{q}, \vec{p}, t), \tag{23.31}$$

где $\delta F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ — полный дифференциал некоторой функции $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$. Знак $\delta$ здесь означает, что дифференциал взят при фиксированном $t$.

***Определение 61:*** *Каноническое преобразование называется* ***свободным****, если выполняется условие*

$$\det \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0. \tag{23.32}$$

♣

Для свободного канонического преобразования импульсы можно выразить через старые и новые координаты по формулам (23.30):

$$\vec{p} = \vec{p}\,(\vec{q}, \vec{Q}, t). \tag{23.33}$$

С учётом этого условие каноничности (23.31) переписывается в виде

$$c \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\,\delta Q_i = \delta F(\vec{q}, \vec{p}\,(\vec{q}, \vec{Q}, t), t) = \delta S(\vec{q}, \vec{Q}, t), \tag{23.34}$$

$$cp_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad -P_i = \frac{\partial S}{\partial Q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{23.35}$$

Функция $S$ называется **производящей функцией** канонического преобразования (23.30). Для свободного канонического преобразования записи (23.30) и (23.35) эквивалентны.

**Утверждение 12** Если задано число $c \neq 0$ и функция $S(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ такая, что

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial Q_k} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0, \tag{23.36}$$

то соотношения (23.35) задают каноническое преобразование. $*$

Условие (23.36) необходимо, чтобы разрешить первое из соотношений (23.35) относительно старых координат $q_i$.

Таким образом, можно построить сколько угодно канонических преобразований с заданной валентностью. Возьмём некоторое число $c$ (например, единицу для унивалентных канонических преобразований), зададим функцию $S$, удовлетворяющую соотношению (23.36), и получим каноническое преобразование в форме (23.35).

Покажем, как из производящей функции $S$ можно получить новую функцию Гамильтона. На прошлой лекции было получено, что если к уравнениям Гамильтона (23.2) применить замену переменных (23.4), то в новых переменных уравнения движения выглядят так:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = J c\, \Phi_y^T + \frac{\partial \vec{y}}{\partial t}, \tag{23.37}$$

где $\Phi$ — исходная функция Гамильтона, выраженная через новые переменные. Напомним, что $\vec{y}$ — это $2n$-мерный вектор новых координат и импульсов $\begin{pmatrix} \vec{Q} \\ \vec{P} \end{pmatrix}$. Если условие (23.36) выполняется, что из второго из равенств (23.35) можно получить функцию $\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t)$. Подставим эту функцию в первое из равенств (23.35). Получится тождество относительно $\vec{q}$, $\vec{p}$ и $t$. Продифференцируем по времени обе части этого тождества:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial t}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{23.38}$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_k}{\partial t} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{23.39}$$

$$-\frac{\partial \vec{Q}^T}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial \vec{q}} = 0, \tag{23.40}$$

$$\frac{\partial \vec{Q}^T}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}} = \frac{\partial}{\partial \vec{P}} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right). \tag{23.41}$$

Итак, получено выражение для $\dfrac{\partial \vec{Q}^T}{\partial t}$. Теперь вычислим частную производную $\dfrac{\partial \vec{P}^T}{\partial t}$. Для этого возьмём частную производную по времени от второго из выражений (23.35):

$$-\frac{\partial \vec{P}^T}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial \vec{Q}}, \tag{23.42}$$

$$\frac{\partial \vec{P}^T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{Q}} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right). \tag{23.43}$$

Запишем соотношения (23.41) и (23.43) в матричном виде:

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial t} = J\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_y^T. \tag{23.44}$$

Теперь уравнения (23.37) можно записать так:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = Jc\,\Phi_y^T + J\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_y^T = J\left(c\Phi + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_y^T. \tag{23.45}$$

Итак, новая функция Гамильтона имеет вид

$$\boxed{\Gamma = c\Phi + \frac{\partial S}{\partial t}}. \tag{23.46}$$

В новых переменных уравнения Гамильтона выглядят так:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = J\Gamma_y^T. \tag{23.47}$$

Итак, задав число $c$ и функцию $S$, удовлетворяющую условию (23.36), можно получить свободное каноническое преобразование. Новая функция Гамильтона будет равна сумме произведения старой функции Гамильтона на $c$ и частной производной производящей функции по времени. Выбирая $S$ определённым образом, можно значительно упростить уравнения Гамильтона. Наличие такого алгоритма упрощения функции Гамильтона является большим преимуществом гамильтоновой механики по сравнению с уравнениями Лагранжа. Надлежащим подбором $c$ и $S$ можно получать любые функции Гамильтона, в том числе и тождественно равные нулю.

В конце прошлой лекции приводились 5 примеров. Напомним эти примеры, чтобы проиллюстрировать на них только что изложенную теорию.

1. Рассмотрим тождественную замену переменных: $Q_j = q_j$, $P_j = p_j$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда тривиальным образом $\Gamma = H(\vec{Q}, \vec{P}, t)$. Итак, тождественное преобразование является каноническим.

2. Поменяем ролями координаты и импульсы: $Q_j = p_j$, $P_j = q_j$, $j = 1, \ldots, n$. Это преобразование тоже каноническое, его валентность равна $-1$. Новая функция Гамильтона $\Gamma = -H(\vec{P}, \vec{Q}, t)$.

3. Изменим масштаб по координатам и импульсам: $Q_j = \alpha q_j$, $P_j = \beta p_j$, $j = 1, \ldots, n$. Это преобразование — каноническое с валентностью $c = \alpha\beta$. Новая функция Гамильтона $\Gamma = \alpha\beta\, H\left(\frac{\vec{Q}}{\alpha}, \frac{\vec{P}}{\beta}, t\right)$.

4. Пусть система представляет собой одномерный осциллятор с функцией Гамильтона $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$. Выразим старые переменные через новые следующим образом:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}}\sin Q, \qquad p = \sqrt{2\omega P}\cos Q. \tag{23.48}$$

Оказывается, что это унивалентное каноническое преобразование. Новая функция Гамильтона $\Gamma = \omega P$. Такую замену придумал Пуанкаре, изучая небесную механику.

5. Пусть $H = \dfrac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right)$. Совершим замену переменных $Q = q\cos t - p\sin t$, $q\sin t + p\cos t$. Это преобразование является каноническим унивалентным преобразованием. Итоговая функция Гамильтона $\Gamma = 0$.

Укажем производящие функции в этих примерах.

- Преобразования в примерах 1 и 3 не являются свободными.
- Преобразование примера 2 имеет валентность $c = -1$, а его производящая функция $S = -\sum\limits_{i=1}^{n} q_i Q_i$.
- В примере 4 (одномерный осциллятор) преобразование унивалентно; его производящая функция
$$S = \frac{1}{2}\omega q^2 \operatorname{ctg} Q. \tag{23.49}$$
- Преобразование в примере 5 также унивалентно, а его производящая функция
$$S = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}(q^2 + Q^2) - \frac{qQ}{\sin t}. \tag{23.50}$$

С первого взгляда кажется странным, что тождественное преобразование не является свободным. Дело в том, что существует много производящих функций другого типа, не только в переменных $\vec{q}, \vec{Q}, t$. Рассмотрим один тип преобразований и производящих функций, который охватывает и тождественное преобразование. Это важно, потому что в теории возбуждений система часто интегрируется при малых параметрах, и выгодно применить преобразование, близкое к тождественному.

# 5. Другой тип производящих функций

Предположим, что для преобразования (23.3) удовлетворяется неравенство
$$\det \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \neq 0. \tag{23.51}$$

Тогда из вторых соотношений из (23.3) можно выразить исходные импульсы как функции переменных $\vec{q}$, $\vec{P}$ и $t$:
$$\vec{p} = \vec{p}\,(\vec{q}, \vec{P}, t). \tag{23.52}$$

Перепишем критерий каноничности (23.31):
$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\,\delta q_k - \sum_{k=1}^{n} p_k\,\delta Q_k - \sum_{k=1}^{n} Q_k\,\delta P_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k\,\delta P_k = \delta F\left(\vec{q}, \vec{p}\left(\vec{q}, \vec{P}, t\right), t\right), \tag{23.53}$$

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\,\delta q_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k\,\delta P_k = \delta\left(F\left(\vec{q},\vec{p}\left(\vec{q},\vec{P},t\right),t\right) + \sum_{k=1}^{n} Q_k P_k\right). \tag{23.54}$$

Обозначим функцию $F\left(\vec{q},\vec{p}\left(\vec{q},\vec{P},t\right),t\right) + \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k P_k$ как $S_1\left(\vec{q},\vec{P},t\right)$. Тогда

$$cp_i = \frac{\partial S_1}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial S_1}{\partial p_i}, \qquad 1, 2, \ldots, n. \tag{23.55}$$

Верно и обратное: если задать число $c \neq 0$ и функцию $S_1\left(\vec{q},\vec{P},t\right)$ такую, что выполняется условие

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S_1}{\partial q_i\,\partial P_k}\right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0, \tag{23.56}$$

то равенства (23.55) задают каноническое преобразование с валентностью $c$. Условие (23.56) нужно, чтобы разрешить первые соотношения из (23.55) относительно $Q_i$.

Можно показать (сформулируем без доказательства), что новая функция Гамильтона имеет $\Gamma = c\Phi + \dfrac{\partial S_1}{\partial t}$, как и в случае свободных преобразований.

Рассмотрим один пример — тождественное преобразование. Для него $S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i P_i$.

Одно и то же преобразование может задаваться с помощью разных производящих функций. Для свободных преобразований производящая функция тоже может зависеть только от переменных $\vec{q}$, $\vec{P}$ и $t$.