ЛЕКЦИЯ 28

ТЕОРЕМА НЁТЕР

Ранее в данном курсе рассматривался вопрос замены переменных в уравнении Лагранжа. Было показано, что замену можно осуществить, если воспользоваться принципом Гамильтона – Остроградского.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в лагранжевой форме.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эта система описывает движение голономной системы в потенциальном поле сил. Функция Лагранжа имеет следующие аргументы:

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t).$$

Введем новые переменные — координаты и время:

$$q_i^* = q_i^*(q_1, \dots, q_n, s), \quad t_* = t_*(q_1, \dots, q_n, s),$$

где s — некий вещественный параметр. Будем считать, что замена переменных обратима, дважды дифференцируема, а также при $s = 0$ это преобразование тождественно:

$$q_i^*(q_1, \dots, q_n, 0) = q_i, \quad t_*(q_1, \dots, q_n, 0) = t.$$

Правило, которое позволяет найти функцию Лагранжа в новых переменных:

$$L_* = L \cdot \frac{dt}{dt_*}.$$

Тогда в новых переменных уравнение будет иметь лагранжеву форму:

$$\frac{d}{dt_*}\frac{\partial L_*}{\partial \left(\frac{dq_i^*}{dt_*}\right)} - \frac{\partial L_*}{\partial t_*} = 0.$$

Случается, что функция Лагранжа не меняется после преобразования:

$$L_* = L\left(q_1^*, \dots, q_n^*, \frac{dq_1^*}{dt_*}, \dots, \frac{dq_n^*}{dt_*}, t_*\right),$$

то есть новую функцию Лагранжа можно получить из старой путем замены q_i на q_i^* (пример: уравнение Эдмана).

Напомним обозначения:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.$$

Введем обозначения:

$$\eta_i = \frac{\partial q_i^*}{\partial s}\Big|_{s=0}, \quad \xi = \frac{\partial t_*}{\partial s}\Big|_{s=0}.$$

Теорема 32 (Нётер) Если функция Лагранжа при замене переменных не меняется в упомянутом выше смысле, то система дифференциальных уравнений движения допускает интеграл:

$$f = \sum_{i=1}^{n} p_i \eta_i - \xi H = \text{const}.$$

Док-во: Будем рассматривать малые значения s, то есть в разложении q_i^* и t_* в ряд по s будем ограничиваться линейным приближением:

$$q_i^* = q_i + \eta_i s + \ldots, \quad t_* = t + \xi s + \ldots$$

Тогда

$$q_i = q_i^* - \eta_i s + \ldots, \quad t = t_* - \xi s + \ldots$$

Покажем, что $\dfrac{\partial L_*}{\partial s}\Big|_{s=0} = 0$.

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i^*}{dt} - \dot{\eta}_i s + \cdots = \frac{dq_i^*}{dt_*}\frac{dt_*^*}{dt} - \dot{\eta}_i s + \cdots = \frac{dq_i^*}{dt_*}(1 + \dot{\xi} s) - \dot{\eta}_i s + \cdots =$$

$$= \frac{dq_i^*}{dt_*} + \dot{q}_i^* \dot{\xi} s + \cdots - \dot{\eta}_i s + \cdots = \frac{dq_i^*}{dt_*} + (\dot{q}_i^* \dot{\xi} - \dot{\eta}_i) s + \ldots$$

$$L_* = L\left(q_i^* - \eta_i s + \ldots, \frac{dq_i^*}{dt_*} + (\dot{q}_i \dot{\xi} - \dot{\eta}_i) s + \ldots, t_* - \xi s + \ldots\right) \cdot (1 - \dot{\xi} s + \ldots).$$

Теперь разложим это выражение в ряд по s:

$$L_* = L\left(q_i^*, \frac{dq_i^*}{dt_*}, t_*\right) - L\dot{\xi} s - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i s + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \dot{\xi} - \dot{\eta}_i) s + \cdots - \frac{\partial L}{\partial t} \xi s + \cdots =$$

$$= L\left(q_i^*, \frac{dq_i^*}{dt_*}, t_*\right) - s\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L\right)\right] + \ldots$$

Из уравнения Лагранжа следует, что $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$. Также

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L\right) = H.$$

Следовательно,

$$L_* = L\left(q_i^*, \frac{dq_i^*}{dt_*}, t_*\right) - s\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\eta_i - \xi H\right) + \dots = \text{const}.$$

Значит,

$$f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\eta_i - \xi H = \text{const}.$$

Рассмотрим интеграл энергии в консервативных или обобщенно-консервативных системах.

1) Пусть координаты не меняются, а время допускает сдвиг:

$$q_i^* = q_i, \quad t_* = t + s.$$

Тогда $\eta_i = 0$, $\xi = 1$,

$$f = \sum_{i=1}^{n} p_i\,\eta_i - \xi H = \text{const} \quad \Rightarrow \quad H = \text{const}.$$

2) Пусть q_α — циклическая координата:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0.$$

Произведем следующую замену:

$$q_\alpha^* = q_\alpha + s, \quad q_i^* = q_i \ (i \neq \alpha), \quad t_* = t.$$

Тогда

$$\eta_\alpha = 1, \quad \eta_i = 0 \ (i \neq \alpha), \quad \xi = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\alpha = \text{const}.$$

3) Рассмотрим замкнутую систему материальных точек.

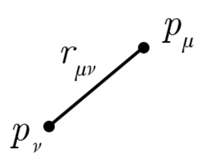

Рис. 28.1

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2),$$

потенциальная энергия:

$$\Pi = \Pi(r_{\nu\mu}).$$

Сдвиг:

$$x_\nu^* = x_\nu + s, \quad y_\nu^* = y_\nu, \quad z_\nu^* = z_\nu, \quad t_* = t,$$

$$\eta_{\nu x} = 1, \quad \eta_{\nu y} = 0, \quad \eta_{\nu z} = 0, \quad \xi = 0.$$

Импульсы:

$$p_{\nu x} = m_\nu \dot{x}_\nu, \quad p_{\nu y} = m_\nu \dot{y}_\nu, \quad p_{\nu z} = m_\nu \dot{z}_\nu.$$

Интеграл:

$$f = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{x}_\nu = Q_x = \text{const}.$$

Функция L при таком преобразовании также не изменится, так как при сдвиге величины $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{z}_\nu$ и расстояния между точками не изменятся.

4) В этой же системе материальных точек осуществим поворот на угол s.

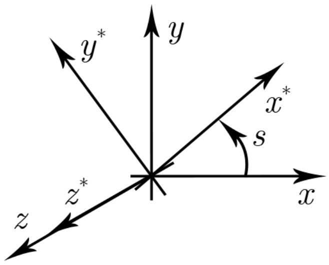

Рис. 28.2

$$\begin{cases} x_\nu^* = x_\nu \cos s + y_\nu \sin s, \\ y_\nu^* = -x_\nu \sin s + x_\nu \cos s, \\ z_\nu^* = z_\nu, \\ t_* = t. \end{cases}$$

При такой замене переменных кинетическая и потенциальная энергии не меняются.

$$\eta_{\nu x} = \frac{\partial x_\nu^*}{\partial s}\Big|_{s=0} = y_\nu, \quad \eta_{\nu y} = \frac{\partial y_\nu^*}{\partial s}\Big|_{s=0} = -x_\nu, \quad \eta_{\nu z} = 0, \quad \xi = 0.$$

Интеграл:

$$f = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{x}_\nu y_\nu - m_\nu \dot{y}_\nu x_\nu = -K_z = \mathrm{const} \text{ — кинетический момент сохраняется.}$$

5) Функция Лагранжа в уравнении Эдмана имеет следующий вид:

$$L = \frac{1}{2} t^2 \left(\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{1}{3} q^6 \right).$$

При введении следующей замены функция Лагранжа не изменяется:

$$q^* = (1+s)q, \quad t_* = \frac{1}{1+s^2} t.$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = t^2 \dot{q}, \quad H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2} t^2 \left(\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{1}{3} q^6 \right).$$

$$\eta = \frac{\partial q^*}{\partial s}\Big|_{s=0} = q, \xi = \frac{\partial t^*}{\partial s}\Big|_{s=0} = -2t,$$

$$f = p\eta - \xi H = t^2 q \dot{q} + t^3 \left(\dot{q}^2 + \frac{1}{3} q^6 \right) = \mathrm{const}.$$

6) Представим бесконечно протяженную винтовую линию, вытянувшуюся вдоль оси z, обладающую массой и притягивающей к себе материальные точки по закону всемирного тяготения.

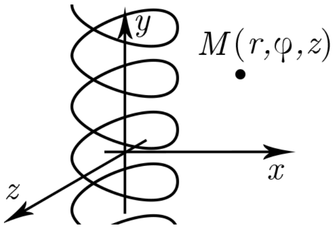

Рис. 28.3

Кинетическая энергия, записанная в цилиндрических координатах:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2).$$

Пусть шаг винтовой линии равен h. Тогда следующая замена не изменит функцию Лагранжа:

$$r^* = r, \quad \phi^* = \phi + s, \quad z^* = z + \frac{h}{2\pi}s.$$

$$\eta_\phi = \frac{\partial \phi^*}{\partial s}\Big|_{s=0} = 1, \quad \eta_r = 0, \quad \eta_z = \frac{h}{2\pi}.$$

Интеграл:

$$f = p_\phi \cdot 1 + p_z \cdot \frac{h}{2\pi} = \text{const},$$

$$mr^2\dot{\phi} + \frac{h}{2\pi}m\dot{z} = \text{const},$$